명지 대학교

교과목	미적분학2		대학	대학 (자연 캠퍼스)			점수		검인	
			학과	학과/학부						
담당교수	공동 출제		학년		학번					
			성명							

2025학년도 2학기 미적분학2 중간고사(각 5점)

※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.

※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+5}{3n+7}\right)^n$의 수렴, 발산을 판정하여라.

[풀이]

$$a_n=\left(\frac{4n+5}{3n+7}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{3n+7}=\frac{4}{3}>1$$

이므로 근 판정법에 의하여 급수는 발산한다.

2. 함수 $f(x)=\frac{1}{x+5}$의 멱급수 표현과 수렴 구간을 구하여라.

[풀이]

$\frac{1}{x+5}=\frac{1}{5}\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{5}\right)}=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{5}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{5^{n+1}}$ 이다.

급수는 $\left|-\frac{x}{5}\right|<1$, 즉 $|x|<5$일 때 수렴한다. 수렴구간은 $(-5,5)$이다.

3. $\boldsymbol{r}(t)=\langle t, \cos\pi t, \sin\pi t\rangle$일 때, $\int_0^1 \boldsymbol{r}(t)dt$를 구하여라.

[풀이]

$\int_0^1 \boldsymbol{r}(t)dt=\int_0^1\langle t, \cos\pi t, \sin\pi t\rangle dt$

$=\left[\left\langle \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{\pi}\sin\pi t, -\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right\rangle\right]_0^1=\left\langle\frac{1}{2},0,\frac{1}{\pi}\right\rangle-\left\langle 0,0,-\frac{1}{\pi}\right\rangle$

$=\left\langle\frac{1}{2},0,\frac{2}{\pi}\right\rangle$

4. 함수 $f(x)=\sqrt[3]{8-x}$의 매클로린 급수를 구하여라.

[풀이]

$f(x)=2\sqrt[3]{1+\left(-\frac{x}{8}\right)}=2\left(1+\left(-\frac{x}{8}\right)\right)^{\frac{1}{3}}=2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{n}\left(-\frac{x}{8}\right)^n$이고

$\binom{\frac{1}{3}}{n}=\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}=\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\cdots\left(-\frac{3n-4}{3}\right)}{n!}$

$=(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-4)}{3^n n!}\quad(n\geq 2)$, $\binom{\frac{1}{3}}{0}=1$, $\binom{\frac{1}{3}}{1}=\frac{1}{3}$이므로

$f(x)=2\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{x}{8}\right)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdots(3n-4)}{3^n n!}\left(-\frac{x}{8}\right)^n\right)$

$=2-\frac{x}{12}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdots(3n-4)}{24^n n!}x^n$

5. 두 벡터 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$가 $|\boldsymbol{a}|=5$, $|\boldsymbol{b}|=4$, $comp_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=2$을 만족시킬 때, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$의 값은?

[풀이]

$2=comp_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\theta=4\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \theta=\frac{\pi}{3}\quad(0\le\theta\le\pi)$

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{3}=10\sqrt{3}$

6. 점 $\mathrm{P}(2,0,1)$을 지나는 두 직선 l_1, l_2 가 각각 벡터 $\boldsymbol{a}=\langle 1,-1,1\rangle$, $\boldsymbol{b}=\langle 0,2,1\rangle$ 와 평행할 때,

(1) 두 직선의 사이의 각 $\theta(0\le\theta\le\pi)$의 코사인 $\cos\theta$를 구하여라.

[풀이]

두 직선 l_1, l_2 가 각각 벡터 $a=\langle 1,-1,1\rangle$, $b=\langle 0,2,1\rangle$ 와 평행하면,

$\cos\theta=\frac{a\bullet b}{|a||b|}=\frac{0-2+1}{\sqrt{3}\ \sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{15}}$

(2) 두 직선을 포함하는 평면의 방정식을 구하여라.

[풀이]

두 직선을 포함하는 평면의 법선벡터는 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=\langle -3,-1,2\rangle$이고 점 $P(2,0,1)$를 포함하므로, 평면의 방정식은

$$-3(x-2)-(y-0)+2(z-1)=0$$
$$\Leftrightarrow -3x-y+2z+4=0 \text{ 또는 } 3x+y-2z-4=0$$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{2^n\sqrt{n+3}}$ 의 수렴 반지름과 수렴 구간을 구하여라.

[풀이]

$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n+4}}\frac{2^n\sqrt{n+3}}{(x-3)^n}\right|$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+4}}\frac{1}{2}|x-3|=\frac{1}{2}|x-3|<1$

$|x-3|<2$일 때 절대수렴. $\Rightarrow$ 수렴반지름 $R=2$

$x=1$일 때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$

① $b_n=\frac{1}{\sqrt{n+3}}\ge b_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+4}}$

② $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}=0$

교대급수 판정법에 의해 급수는 수렴한다.

$x=5$일 때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$

$0<\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+3}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1<\infty$이고 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 은 발산$\left(p=\frac{1}{2}<1\right)$ 이므로 극한비교 판정법에 의해 급수는 발산한다. 따라서, 수렴구간은 $[1,5)$이다.

8. 벡터함수

$$\mathrm{r}(t)=\langle \ln(t+1),\ \sin t,\ e^t\rangle$$

에 의하여 정의되는 곡선 C 위의 점 $(0,0,1)$에서 접선과 z축이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라

(단, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$).

[풀이]

$\mathbf{r}'(t)=\left\langle\frac{1}{t+1},\cos t,e^t\right\rangle$이므로 접선의 방향 벡터는

$\mathbf{r}'(0)=\langle 1,1,1\rangle$

이다. 또한 z축의 양의 방향과 평행한 벡터 $\mathbf{v}=\langle 0,0,1\rangle$에 대하여 접선과 z축 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{r}'(0)\bullet\mathbf{v}}{|\mathbf{r}'(0)||\mathbf{v}|}=\frac{\langle 1,1,1\rangle\bullet\langle 0,0,1\rangle}{|\langle 1,1,1\rangle||\langle 0,0,1\rangle|}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

이다.

※수고하셨습니다.