명지 대학교

<table>
<tr><td rowspan="2">교과목</td><td rowspan="2">미적분학2</td><td rowspan="4"></td><td>대학</td><td colspan="3">대학 (자연 캠퍼스)</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">점수</td><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">검인</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>학과</td><td colspan="3">학과/학부</td></tr>
<tr><td rowspan="2">담당교수</td><td rowspan="2">공동 출제</td><td>학년</td><td></td><td>학번</td><td></td></tr>
<tr><td>성명</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

2025학년도 2학기 미적분학2 기말고사(각 5점)

※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.
※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. $R=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,\,0\le y\le 1\}$일 때, $\iint_R (x+ye^x)dA$를 구하여라.

[풀이]

$$\iint_R (x+ye^x)dA=\int_0^1\int_0^1 (x+ye^x)dy\,dx=\int_0^1\left[xy+\frac{1}{2}y^2e^x\right]_0^1 dx$$

$$=\int_0^1\left(x+\frac{1}{2}e^x\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}e^x\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e$$

2. 점 $(1,1,2)$에서 곡면 $z=3x^2-y^2$에 대한 접평면을 구하여라.

[풀이]

$f(x,y)=3x^2-y^2$일 때,

$$f_x=6x,\ f_y=-2y$$

이고

$$f_x(1,1)=6,\ f_y(1,1)=-2$$

이다. 따라서,

$$z-2=6(x-1)-2(y-1)$$

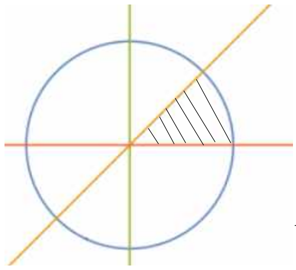
이고

$$6x-2y-z=2$$

이다.

3. D는 $y=0$, $y=x$, $x^2+y^2=1$ 의해 유계된 제1사분면 영역일 때, $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$를 계산하여라.

[풀이]



$D: 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 r\cdot r\,dr\,d\theta=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

4. 이변수함수 $f(x,y)$의 모든 2계 편도함수 f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}가 존재하고 각각 연속이라고 가정하자. 또한 함수 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}의 함수값이 아래 표와 같다.

함수 \ (x,y)	$(1,1)$	$(3,-1)$
$f_{xx}(x,y)$	4	8
$f_{xy}(x,y)$	1	3
$f_{yy}(x,y)$	3	-3

$g(s,t)=f(2s+t,2t-3s)$일 때, $g_{ss}(1,1)=\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}\big|_{s=1,t=1}$의 값을 구하여라.

[풀이]

$g(s,t)=f(x,y)$ $(x=2s+t,\ y=2t-3s)$

$g_s=f_x\cdot 2+f_y\cdot(-3)=2f_x-3f_y$

$$g_{ss}=\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}=\frac{\partial g_s}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}(2f_x-3f_y)=2\frac{\partial}{\partial s}f_x-3\frac{\partial}{\partial s}f_y$$

$=2(f_{xx}\cdot 2+f_{xy}\cdot(-3))-3(f_{yx}\cdot 2+f_{yy}\cdot(-3))$

$=4f_{xx}-12f_{xy}+9f_{yy}$

$g_{ss}(1,1)=\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}\big|_{s=1,t=1}$

$=4f_{xx}(3,-1)-12f_{xy}(3,-1)+9f_{yy}(3,-1)=-31$

5. 삼변수함수 $f(x,y,z)=\dfrac{z^2}{x+y}$에 대하여, 점 $\mathrm{P}(1,2,1)$에서 점 $\mathrm{Q}(0,2,1)$방향으로 점 P에서 f의 방향도함수를 구하여라.

[풀이]

$$\nabla f(x,y,z)=\left\langle \frac{-z^2}{(x+y)^2},\frac{-z^2}{(x+y)^2},\frac{2z}{x+y}\right\rangle,\qquad \overrightarrow{PQ}=\langle -1,0,0\rangle = u$$

은 단위 방향벡터이므로,

점 P에서 f의 방향도함수는

$$D_u f(1,2,1)=\nabla f(1,2,1)\bullet u=\left\langle -\frac{1}{9},-\frac{1}{9},\frac{2}{3}\right\rangle\bullet\langle -1,0,0\rangle=\frac{1}{9}$$

6. 방정식 $yz+x\ln z=y^2$으로 정의되는 x,y에 대한 이변수 함수 z에 대하여,

(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2,1)$와 $\dfrac{\partial z}{\partial y}(2,1)$을 구하여라.

(2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(2,1)$을 구하여라.

[풀이]

(1) $F(x,y,z)=yz+x\ln z-y^2=0$라 하면,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{\ln z}{y+\frac{x}{z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{z-2y}{y+\frac{x}{z}}$$

$x=2,y=1$일 때 $z=1$이므로,

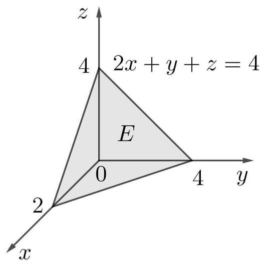
$$\frac{\partial z}{\partial x}(2,1)=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}(2,1)=\frac{1}{3}$$

(2) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{z-2y}{y+\frac{x}{z}}\right)$$

$$=-\left[\frac{\frac{\partial z}{\partial x}\left(y+\frac{x}{z}\right)-(z-2y)\left(\frac{1}{z}-\frac{x}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(y+\frac{x}{z}\right)^2}\right]$$ 이므로,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(2,1)=-\frac{1}{9}$$

7. 영역 E가 좌표면과 평면 $2x+y+z=4$에 의해 둘러싸인 사면체일 때,



삼중적분 $\displaystyle\iiint_E z\,dV$를 구하여라.

(풀이)

$$E=\{(x,y,z)|0\le x\le 2, 0\le y\le 4-2x, 0\le z\le 4-2x-y\}$$

이므로

$$\iiint_E z\,dV=\int_0^2\int_0^{4-2x}\int_0^{4-2x-y} z\,dz\,dy\,dx$$

$$=\int_0^2\int_0^{4-2x}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=4-2x-y}dy\,dx=\int_0^2\int_0^{4-2x}\frac{1}{2}(4-2x-y)^2dy\,dx$$

$$=\int_0^2\left[-\frac{1}{6}(4-2x-y)^3\right]_{y=0}^{y=4-2x}dx=\int_0^2\frac{1}{6}(4-2x)^3dx$$

$$=\left[-\frac{1}{48}(4-2x)^4\right]_0^2=\frac{16}{3}$$

8. 영역 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$에서

함수 $f(x,y)=2x^2+y^2-2y+3$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

[풀이]

1) D의 내부에서의 임계점

$f_x(x,y)=4x=0$

$f_y(x,y)=2y-2=0$

$\Rightarrow\quad (x,y)=(0,1)$

$f(0,1)=2$

2) D의 경계선에서의 최댓값/최솟값

$g(x,y)=x^2+y^2$이라 하자. 라그랑주 승수법을 이용하면

$$\begin{cases}\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y)\\ g(x,y)=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad\begin{cases}4x=2\lambda x & \cdots ①\\ 2y-2=2\lambda y & \cdots ②\\ x^2+y^2=4 & \cdots ③\end{cases}$$

①에서 $x=0$ 또는 $\lambda=2$

경우1) $x=0$

③에 대입 $y^2=4\Rightarrow y=\pm 2$

$\Rightarrow\quad (x,y)=(0,2),(0,-2)$

$f(0,2)=3,\ f(0,-2)=11$

경우2) $\lambda=2$

②에 대입 $2y-2=4y\Rightarrow y=-1$

③에 대입 $x^2+1=4\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow\quad (x,y)=(\sqrt{3},-1),(-\sqrt{3},-1)$

$f(\pm\sqrt{3},-1)=12$

그러므로 최댓값은 12, 최솟값은 2

※수고하셨습니다.