4.1 최댓값과 최솟값

1. 다음 함수의 임계수를 구하여라.

(1) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt[4]{x}$

답: $x = 0$, $\frac{4}{9}$

(2) $g(x) = 3x - \sin^{-1}x$

답: $x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$일 때 구간 $\left[\frac{1}{5}, 4\right]$에서 f의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

답: 최대 $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{26}{5}$, 최소 $f(1) = 2$

3. $g(x) = \sin 2x + 2\cos x$일 때 구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 g의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

답: 최대 $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 최소 $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

4.2 평균값 정리

1. 방정식 $x^5 + x - 4 = 0$이 꼭 하나의 실근을 가짐을 보여라.

증명: 학생여러분이 해주세요.

2. $f(1) = 10$, $f'(x) \geq 4\,(1 \leq x \leq 4)$일 때, $f(4)$는 얼마나 작은 값을 가질 수 있는가?
답: 22

3. $2\tan^{-1}\sqrt{x} - \sin^{-1}\frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{2}$임을 증명하여라.

증명: 학생여러분이 해주세요.

4.3 그래프의 모양을 말해주는 도함수

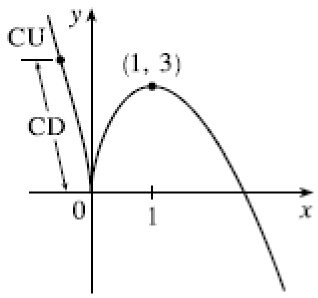
1. $f(x) = x^2 - \ln x - x$에 대하여, f가 증가또는 감소하는 구간, 극대값과 극솟값, 변곡점, 오목구간을 구하여라.

답: 증가 $(1, \infty)$, 감소 $(0, 1)$, 극대 없다, 극소 $f(1) = 0$, 변곡 없다, 정의역에서 위로 오목(아래로 볼록)

2. 다음 함수의 증가, 감소구간, 극댓값과 극솟값, 오목구간, 변곡점을 구하고 그래프를 그려라.

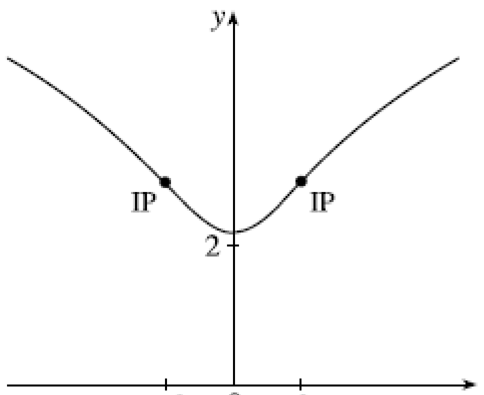
(1) $f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{3}}$

답: 증가 $(0,1)$, 감소 $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$, 극대 $f(1)=3$, 극소 $f(0)=0$, 위로오목(아래로 볼록) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, 아래로 오목(위로 볼록) $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup(0,\infty)$, 변곡점 $\left(-\frac{1}{2},\frac{6}{\sqrt[3]{4}}\right)$



(2) $g(x) = \ln(x^2+9)$

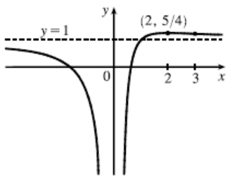
답: 증가 $(0,\infty)$, 감소 $(-\infty,0)$, 극대 없다, 극소 $f(0)=\ln 9$, 위로 오목(아래로 볼록) $(-3,3)$, 아래로 오목(위로 볼록) $(-\infty,-3)\cup(3,\infty)$, 변곡점 $(\pm 3,\ln 18)$



3. 함수 $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x^2}$의 수직점근선, 수평점근선, 증가, 감소구간, 극댓값과 극솟값, 오목구간, 변곡점을 구하고 그래프를 그려라.

답: 수직 점근선 $x=0$, 수평 점근선 $y=1$, 증가 $(0,2)$, 감소 $(-\infty,0)\cup(2,\infty)$, 극대 $f(2)=\frac{5}{4}$, 극소 없다, 위로 오목(아래로 볼록) $(3,\infty)$, 아래로 오목(위로 볼록)

$(-\infty, 0) \cup (0, 3)$, 변곡 $\left(3, \frac{11}{9}\right)$

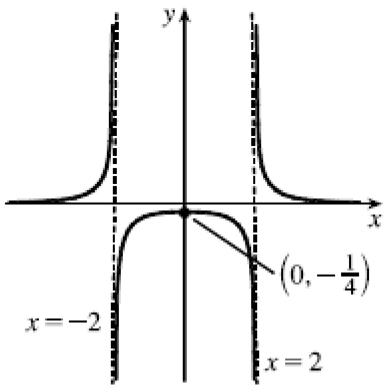


4.5 그래프 그리기 요약

1. 이번 절의 지침을 이용해서 그래프를 그려라.

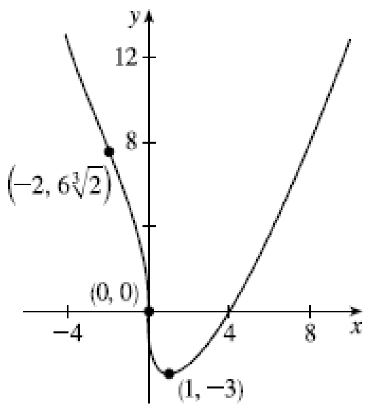
(1) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

답:



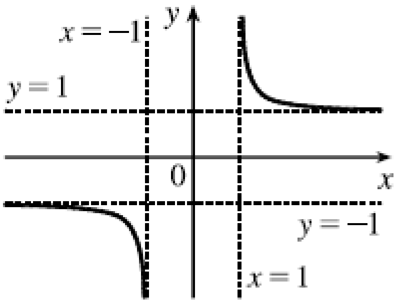
(2) $y = x^{\frac{4}{3}} - 4x^{\frac{1}{3}}$

답:



(3) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

답:



4. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x^2-3x-2}$일 때 다음 (1)과 (2)를 구하여 그래프를 그려라.

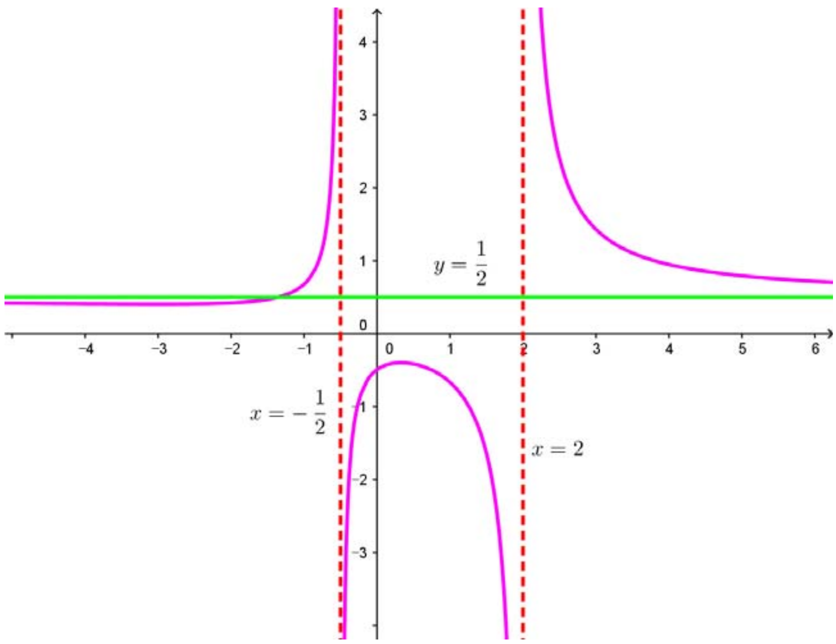
(1) $f(x)$의 수평점근선과 수직점근선을 구하여라.

답: $y=\dfrac{1}{2}$, $x=-\dfrac{1}{2}$, $x=2$

(2) $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하여라.

답: 극솟값 $f(-3)=\dfrac{2}{5}$ 이고 극댓값 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{5}$

(3) 위의 (1)과 (2)를 이용하여 $f(x)$의 그래프를 그려라.
답:



4.4 부정형과 로피탈 법칙

1. 극한을 구하여라.

(1) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1}$

답: 3

(2) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2}$

답: $-\frac{3}{2}$

(3) $\lim_{x \to -\infty} x \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)$

답: -1

(4) $\lim_{x \to 0^+}\left(\frac{1}{\tan^{-1}x}-\frac{1}{x}\right)$

답: 0

(5) $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}}$

답: 2

(6) $\lim_{x \to \infty}\left(\frac{x-3}{x+5}\right)^{x+1}$

답: e^{-8}

(7) $\lim_{x \to \infty}[x - x^2 \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)]$

답: $\frac{1}{2}$

2. f'이 연속이고 $f(2)=0$, $f'(2)=2$일 때, $\lim_{x \to 0}\left(\frac{f(2+7x)+f(2-5x)}{x}\right)$를 구하여라.

답: 4

3. $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x^3}+a+\frac{b}{x^2}\right)=0$ 이 성립하는 a와 b를 구하여라.

답: $a=\frac{4}{3}, b=-2$

4.7 최적화 문제

1. 농부가 울타리 재료 $100\,\mathrm{m}$를 가지고 직사각형 모양의 밭에 울타리를 치려고 한다. 넓이가 최대가 되는 가로 세로의 길이를 구하여라.
답: 25, 25

2. 반지름이 r이고 높이가 h인 원통형 캔의 부피가 $64\,\mathrm{cm}^3$이 되도록 만드는데 소요되는 재료가 최소가 되게 하는 치수를 구하여라. 단, 캔의 뚜껑과 밑바닥은 정사각형 철판으로부터 잘라낸다고 하자.

답: 반지름 2, 높이 $\frac{16}{\pi}$

3. 타원 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$위의 점 중에서 (1,0)과 가장 멀리 떨어져 있는 점을 구하여라.

답: $\left(-\frac{1}{3},\ \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

4. 이등변 삼각형의 등변의 길이가 $10\sqrt{2}$라 하자. 삼각형의 넓이가 최대일 때 나머지 한 변의 길이를 구하여라.
답: 20

5. 원기둥이 반지름과 높이가 모두 3인 원뿔에 내접해 있다. 이 원기둥의 최대 부피를 구하여라.
답: 4π

6. 천 개의 빛의 촉광으로 측정된 빛의 양이 x일 때, 어떤 종의 플랑크톤 식물이 광합성을 하는 비율을 함수로 나타내면 $f(x)=\frac{kx}{x^2+x+4}$이다. (단, k는 양의 상수이고 $x\geq 0$)
비율의 최대가 20일 때 k의 값을 구하여라.
답: 100

4.9 원시함수

1. $f(x)=\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}$의 원시함수를 구하여라.

답: $2x^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

2. $f(2)=3,\ f'(1)=2$이고 $f''(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$일 때, $f(x)$를 구하여라.

답: $\frac{x^4}{12}-\ln x+\frac{8}{3}x+\ln 2-\frac{11}{3}$

3. 가속도 $a(t)=e^t+1$로 움직이는 물체의 초기조건이 $s(0)=3,\ v(0)=-2$이다. 물체의 위치함수 $s(t)$를 구하여라.

답: $e^t+\dfrac{t^2}{2}-3t+2$

5.2 정적분

1. 적분의 정의를 이용하여 $\displaystyle\int_0^1 (x^3-x)dx$를 계산하여라. (미적분학5장3절의 미적분학기본정리 및 적분공식사용 불가)

답: $-\dfrac{1}{4}$

2. $\displaystyle\int_0^3 \left(1+\sqrt{9-x^2}\right)dx$을 넓이로 해석하여 계산하여라.

답: $\dfrac{9}{4}\pi+3$

3. 연습문제 34번 답: $(a)\ 4$, $(b)\ -2\pi$, $(c)\ \dfrac{9}{2}-2\pi$

4. 다음 극한을 정적분으로 표현하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^4}{n^5}+\frac{i}{n^2}\right)$

답: $\displaystyle\int_0^1 (x^4+x)\,dx$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2}\right)$

답: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

5.3 미적분학의 기본정리

1. 미적분학의 기본정리1을 이용하여 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=\displaystyle\int_3^{e^x}\ln t\,dt$

답: xe^x

(2) $g(x)=\int_{1}^{\sqrt{x}} t \cdot \tan t\,dt$

답: $\frac{1}{2}\tan\sqrt{x}$

(3) $h(x)=\int_{x^2}^{x} e^{t^2}dt$

답: $e^{x^2}-2xe^{x^4}$

(4) $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{2x}\tan^{-1}t\,dt$

답: $2\tan^{-1}2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\tan^{-1}\sqrt{x}$

2. 다음 적분을 계산하여라.

(1) $\int_{0}^{1}(2+x\sqrt{x})dx$

답: $\frac{12}{5}$

(2) $\int_{1}^{4}\frac{1+x^2}{\sqrt{x}}dx$

답: $\frac{72}{5}$

(3) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

답: $-\frac{\pi}{6}$

3. 다음 방정식에서 무엇이 잘못되었는가?

$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta = [\sec\theta]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = -3$

4. $f(x)=\int_{0}^{x}(1-t^2)e^{t^2}dt$ 에 대하여 $f(x)$가 증가하는 구간을 구하여라.

답: (-1, 1)

5. $f(x)=\int_{1}^{x}e^{t^2}dt$일 때, $x=1$에서 곡선 $y=f(x)$의 접선방정식을 구하여라.

답: $y=ex-e$

6. 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 $f(1) = -1$이고 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f'(x)dx = 5$를 만족시킨다. 함수

$g(x) = \int_0^{\cos x} f(t)dt$이고 $h(x) = \int_0^x g(t)dt$일 때, $h''\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하여라.

답: $3\sqrt{3}$

7. 모든 실수에서 정의된 함수 $f(x)$가 연속이고 $f(1) = 2$라고 하자.

$g(x) = \int_{1-x}^{1} e^t f(t+2x)dt$로 정의할 때 $\lim_{x\to 0} g'(x)$를 구하시오.

답: $2e$

5.4 부정적분과 변환정리

1. 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x(x^2+1)^2 dx$

답: $\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$ or $\frac{1}{6}(x^2+1)^3 + C$

(2) $\int \left(\frac{1}{1+r^2} + 1 + r^2\right)dr$

답: $\tan^{-1}r + r + \frac{r^3}{3} + C$

2. 다음 적분을 구하여라.

(1) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x}-x}{x^2}dx$

답: $-\sqrt{2} - \ln 2 + 2$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta$

답: $\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$

(3) $\int_0^{\frac{4}{3}\pi} |\sin x| dx$

답: $\frac{5}{2}$

3. 연습문제 49번 답: $\frac{4}{3}$

4. 연습문제 50번   답: $\frac{1}{5}$

5.5 치환법

1. 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \cos^2\theta \sin\theta d\theta$

답: $-\frac{1}{3}\cos^3\theta + C$

(2) $\int \frac{x^3}{x^4+5}dx$

답: $\frac{1}{4}\ln(x^4+5) + C$

(3) $\int \cos x \cos(\sin x) dx$

답: $\sin(\sin x) + C$

(4) $\int \frac{2x}{1+x^4}dx$

답: $\tan^{-1}x^2 + C$

2. 정적분을 계산하여라.

(1) $\int_0^1 2xe^{-x^2}dx$

답: $1-\frac{1}{e}$

(2) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

답: $\frac{\pi^2}{18}$

(3) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

답: 2

(4) $\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x}dx$

답: $\ln(e+1)$

(5) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^4}$

답: $\frac{1}{6}$

3. f가 연속이고 $\int_0^9 f(x)dx = 8$일 때, $\int_0^3 xf(x^2)dx$를 구하여라.

답: 4

6.1 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이

1. 주어진 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

(1) $x=3,\ y=\frac{1}{x^2},\ y=\frac{1}{x}$

답: $\ln 3 - \frac{2}{3}$

(2) $y^2 = 1-x,\ y^2 = x+1$

답: $\frac{8}{3}$

(3) $y=x^3,\ y=x$

답: $\frac{1}{2}$

(4) $x=0,\ x=\frac{\pi}{4},\ y=\sin 2x,\ y=\cos x$

답: $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. 곡선 $y=\frac{1}{x^2}$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=9$에 의해 둘러싸인 영역을 R라 하자. 직선 $x=a$에 의해 영역 R가 이등분되고, 직선 $y=b$에 의해 영역 R가 이등분될 때, ab의 값을 구하여라.

답: $\frac{1}{5}$

6.2 부피

1. 주어진 곡선들로 둘러싸인 영역을 주어진 직선을 축으로 회전하여 생기는 입체의 부피를

구하여라.

(1) x축에 대하여, $y=\sqrt{25-x^2}$, $x=0$, $y=0$, $x=1$

답: $\frac{74}{3}\pi$

(2) y축에 대하여, $y=0$, $x=2$, $y=\frac{x^2}{4}$

답: 2π

(3) $x=2$에 대하여, $y=0$, $x=1$, $y=x^3$

답: $\frac{3}{5}\pi$

2. 연습문제 49번 답: $\pi h^2(r-\frac{h}{3})$

3. 연습문제 59번 답: $\frac{8}{15}$

4. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(0)=0$이고 이계도함수 $f''(x)$가 존재한다. (나) $f(x)=xf'(x)-\sqrt{4+x^2}$

$\int_0^{\ln 8}\left(e^{2f'(x)}+e^{-2f'(x)}\right)dx=A$일 때, 함수 $y=f'(x)$의 그래프와 y축 및 직선 $y=\ln 8$로 둘러싸인 부분을 y축 둘레로 회전시켜 생기는 입체의 부피를 A의 식으로 나타내시오. (단, $\sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$이다)

답: $\pi(A-2\ln 8)$

6.3 원통셸 방법에 의한 부피계산

1. 원통셸 방법을 이용하여 $y=-x^2+4x$, $y=x$로 둘러싸인 영역을 y축으로 회전하여 만들어진 입체의 부피를 구하여라.

답: $\frac{27}{2}\pi$

2. 원통셸 방법을 이용하여 곡선 $y=\sqrt{1-x^2}$과 직선 $x+y=1$로 둘러싸인 영역을 x축으로 회전하여 만들어진 입체의 부피를 구하여라.

답: $\frac{\pi}{3}$

3. 원통셸 방법을 사용하여 주어진 곡선으로 둘러싸인 영역을 주어진 직선을 축으로 회전하여 만들어진 입체의 부피를 구하여라.

(1) $y=-2$에 대하여, $y^2=\frac{x}{2}$, $y^2=x-1$

답: $\frac{16}{3}\pi$

(2) $x=1$에 대하여, $x^2=y$, $x^2=2-y$

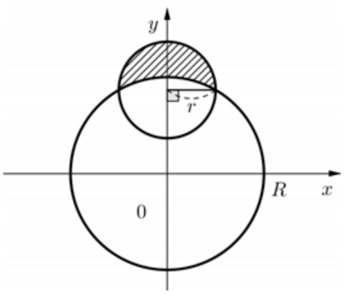
답: $\frac{16}{3}\pi$

4. $y=-x^2+6x-8$과 $y=0$으로 둘러싸인 영역을 y축에 대하여 회전할 때 얻어지는 입체의 부피를 구하여라.
답: 8π

5. $y=-x^2+6x-8$과 $y=0$으로 둘러싸인 영역을 x축에 대하여 회전할 때 얻어지는 입체의 부피를 구하여라.

답: $\frac{16}{15}\pi$

6. 반지름이 r과 R인 두 원이 겹쳐졌을 때 나타나는 초승달 모양의 영역을 x축을 축으로 회전하여 생기는 입체도형의 부피를 구하여라.



답: $\pi^2r^2\sqrt{R^2-r^2}$

7. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$으로 둘러싸인 영역을 $x=a$를 축으로 회전하여 생기는 입체의 부피를 구하여라.
답: $2\pi^2a^2b$