

7.1 부분적분

1. 다음 적분을 계산하여라.

$$(1) \int_2^4 \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\text{답: } \frac{1}{4}$$

$$(2) \int 4 \tan^{-1} 2\theta d\theta$$

$$\text{답: } 4\theta \tan^{-1} 2\theta - \ln|1 + 4\theta^2| + C$$

$$(3) \int 4x \sin 2x dx$$

$$\text{답: } -2x \cos 2x + \sin 2x + C$$

$$(4) \int_0^{\pi} \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx$$

$$\text{답: } \frac{4}{e}$$

$$(5) \int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3} dx$$

$$\text{답: } -\frac{1}{8}(\ln 2)^2 - \frac{1}{8}\ln 2 + \frac{3}{16}$$

7.2 삼각함수의 적분

1. 다음 적분을 계산하여라.

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16 \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

$$\text{답: } \pi$$

$$(2) \int \cos^3 \theta \sin^6 \theta d\theta$$

$$\text{답: } -\frac{\sin^9 \theta}{9} + \frac{\sin^7 \theta}{7} + C$$

$$(3) \int 3 \sec x \tan^3 x dx$$

$$\text{답: } \sec^3 x - 3 \sec x + C$$

$$(4) \int 15 \tan^2 x \sec^4 x dx$$

$$\text{답: } 3 \tan^5 x + 5 \tan^3 x + C$$

$$(5) \int 30 \cos 10x \cos 5x dx$$

$$\text{답: } 3 \sin 5x + \sin 15x + C$$

7.3 삼각치환

1. 다음 적분을 계산하여라.

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$$

$$\text{답: } \ln |\sqrt{4+x^2} + x| + C$$

$$(2) \int \sqrt{16-x^2} dx$$

$$\text{답: } 8 \sin^{-1} \left(\frac{x}{4} \right) + \frac{x}{2} \sqrt{16-x^2} + C$$

$$(3) \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$$

$$\text{답: } 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

$$(4) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$$

$$\text{답: } \ln(\sqrt{x^2+4x+8} + x + 2) + C$$

$$(5) \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+4x+8}} dx$$

$$\text{답: } 2\sqrt{x^2+4x+8} - 4 \ln(\sqrt{x^2+4x+8} + x + 2) + C$$

$$(6) \int \sqrt{20+16x-4x^2} dx$$

$$\text{답: } 9 \sin^{-1} \left(\frac{x-2}{3} \right) + (x-2) \sqrt{5+4x-x^2} + C$$

$$(7) \int_0^1 8 \sqrt{x-x^2} dx$$

$$\text{답: } \pi$$

7.4 부분분수에 의한 유리함수 적분

1. 다음 적분을 계산하여라.

$$(1) \int \frac{3x-1}{x^3-x} dx$$

$$\text{답: } \ln|x| + \ln|x-1| - 2\ln|x+1| + C$$

$$(2) \int \frac{3x+1}{x^2-x-6} dx$$

$$\text{답: } \ln|x+2| + 2\ln|x-3| + C$$

$$(3) \int \frac{x}{(x-2)^2} dx$$

$$\text{답: } \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$$

$$(4) \int \frac{3x^2-3x-1}{(2x+1)(x^2+1)} dx$$

$$\text{답: } \frac{1}{2} \ln|2x+1| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| - 2\tan^{-1}x + C$$

$$(5) \int \frac{3x^2-8x+13}{(x+3)(x-1)^2} dx$$

$$\text{답: } 4\ln|x+3| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$$

$$(6) \int_0^1 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$\text{답: } 2\ln 2 - 1$$

7.8 이상적분

1. 다음 적분들이 수렴하는지 또는 발산하는지를 조사하여라. 그리고 수렴하는 경우에는 그 값을 구하여라.

$$(1) \int_0^\infty \sin x dx$$

$$\text{답: 발산}$$

$$(2) \int_{-\infty}^{-1} x e^{-x^2} dx$$

답: $-\frac{1}{2e}$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx$

답: $\frac{\pi}{3}$

(4) $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2} dx$

답: 발산

(5) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$

답: $3+3\sqrt[3]{2}$

2. $\int_1^{\infty} x^p \ln x dx$ 가 수렴하는 p 를 찾고, 그 경우의 적분값을 구하여라.

답: $\int_1^{\infty} x^p \ln x dx = \begin{cases} \infty & (p > -1) \\ \frac{1}{(p+1)^2} & (p < -1) \end{cases}$

8.1 호의 길이

1. 곡선의 길이를 구하여라.

(1) $x = \frac{(y^2+2)^{\frac{3}{2}}}{3}, 0 \leq y \leq 1$

답: $\frac{4}{3}$

(2) $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$

답: $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{4}$

2. 시작점이 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 일 때 곡선 $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ 에 대한 호의 길이 함수를 찾아라.

답: $2\sqrt{2}\sqrt{x+1} - 4$

8.2 회전체의 겉넓이

1. 함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 의 그래프를 $x=0$ 에서 $x=2$ 까지 x 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 겉넓이를 구하여라.

답: $\frac{13}{3}\pi$

2. 곡선 $y = \sqrt{1-x^2}$ 를 $x=-\frac{1}{2}$ 에서 $x=\frac{1}{2}$ 까지 x 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 겉넓이를 구하여라.

답: 2π

3. 곡선 $y = \sqrt[3]{3x}$ 를 y 축 그리고 직선 $y=2$ 로 둘러싸인 도형을 y 축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 겉넓이를 구하여라.

답: $\frac{17\sqrt{17}-1}{9}\pi$

4. 곡선 $x = \sqrt{a^2 - y^2}, 0 \leq y \leq \frac{a}{2}$ 를 y 축에 대하여 회전시킬 때 얻어지는 곡면의 넓이를 구하여라.

답: πa^2