

교과목	미적분학2		대학	대학 (자연 캠퍼스)				점수		검인	
			학과	학과/학부							
담당교수	공동출제		학년		학번						
			성명								

2019 학년도 2학기 기말고사

※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.

※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 곡면 $\sin(xyz) = x^2y^2 + z^2 - 4$ 위의 점 $(2, 1, 0)$ 에서 접평면의 방정식을 구하여라. (6점)

<풀이>

$F(x, y, z) = \sin(xyz) - x^2y^2 - z^2$ 이라고 가정합니다. 그러면

$$F_x = yz \cos(xyz) - 2xy^2$$

$$F_y = xz \cos(xyz) - 2x^2y$$

$$F_z = xy \cos(xyz) - 2z$$

이므로 접평면의 방정식은

$$F_x(2, 1, 0)(x - 2) + F_y(2, 1, 0)(y - 1) + F_z(2, 1, 0)(z - 0) = 0$$

$$\Rightarrow -4(x - 2) - 8(y - 1) + 2z = 0$$

$$\Rightarrow 2x + 4y - z - 8 = 0$$

입니다.

2. 반복적분 $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \ln(x^3 + 1) dx dy$ 를 구하여라. (6점)

<풀이>

$D = \{(x, y) | \sqrt{y} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 을 고쳐쓰면,

$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$ 이므로,

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \ln(x^3 + 1) dx dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} \ln(x^3 + 1) dy dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \ln(x^3 + 1) dx \quad (u = x^3 + 1 \text{ 치환})$$

$$= \frac{1}{3} \int_1^2 \ln u du = \frac{1}{3} [u \ln u - u]_1^2 = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{1}{3}$$

3. 반복적분 $\int_1^2 \int_0^1 \int_0^1 x e^y dy dx dz$ 를 계산하여라. (6점)

<풀이>

$$\int_1^2 \int_0^1 \int_0^1 x e^y dy dx dz$$

$$= \int_1^2 \int_0^1 x(e - 1) dy dx dz = \int_1^2 \frac{e - 1}{2} dz = \frac{e - 1}{2}$$

4. 라그랑주 승수 방법을 이용하여 곡면 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$ 위의 모든 (x, y, z) 에 대하여 $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라. (6점)

<풀이> 라그랑주 승수 방법을 이용하면,

$$\nabla f = \lambda \nabla g: \quad \langle 4x, 2y, -2z \rangle = \lambda \langle 2x, \frac{y}{2}, \frac{2z}{9} \rangle \text{와}$$

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \text{을 연립으로 풀면,}$$

$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 2, 0), (0, 0, \pm 3)$ 을 얻는다.

$f(\pm 1, 0, 0) = 2, f(0, \pm 2, 0) = 4, f(0, 0, \pm 3) = -9$ 이므로 최댓값 4, 최솟값 -9이다.

5. 곡선 $r(t) = \langle 2\cos t, 2\sin t, e^t \rangle$, $0 \leq t \leq \pi$ 위의 점에서 평면 $\sqrt{3}x + y = 1$ 과 평행한 접선의 대칭방정식을 구하여라. (8점)

<풀이>

평면의 법선벡터는 $n = \langle \sqrt{3}, 1, 0 \rangle$ 이고 곡선의 접선벡터는 $r'(t) = \langle -2\sin t, 2\cos t, e^t \rangle$ 이므로,
평면과 평행한 접선을 갖는 점의 매개변수 t 는

$$n \cdot r'(t) = 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{3}\sin t + 2\cos t = 0 \Leftrightarrow \tan t = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6}$$

따라서 $r\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\sqrt{3}, 1, e^{\frac{\pi}{6}}\right)$ 에서의 접선벡터는

$$r'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(-1, \sqrt{3}, e^{\frac{\pi}{6}}\right)$$

접선의 대칭방정식은

$$\frac{x - \sqrt{3}}{-1} = \frac{y - 1}{\sqrt{3}} = \frac{z - e^{\frac{\pi}{6}}}{e^{\frac{\pi}{6}}}$$

6. 이변수함수 $f(x, y)$ 의 모든 2계 편도함수 $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ 가 존재하고 각각 연속이라고 가정하자. 또한 함수 $f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ 의 함수값이 아래 표와 같다. 다음 물음에 답하여라.

함수 \ (x, y)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
$f(x, y)$	0	1	0	4
$f_x(x, y)$	5	6	-5	0
$f_y(x, y)$	6	-4	8	0
$f_{xx}(x, y)$	-10	-6	-10	-6
$f_{xy}(x, y)$	0	2	4	6
$f_{yy}(x, y)$	-10	-10	-8	-8

(1) 위의 표에 주어진 점 중에서 임계점을 찾고, 그 점에서 극댓값을 갖는지 극솟값을 갖는지 혹은 안장점인지 구분하여라. (4점)

<풀이>

표에서 $f_x(1, 1) = f_y(1, 1) = 0$ 이므로 $(1, 1)$ 이 임계점이다.

$$D = f_{xx}(1, 1)f_{yy}(1, 1) - \{f_{xy}(1, 1)\}^2 = (-6) \times (-8) - 6^2 = 12 > 0$$

이고, $f_{xx}(1, 1) = -6 < 0$ 이므로 $(1, 1)$ 에서 극댓값을 갖는다.

(2) $\mathbb{R}^2$ 의 영역 D 와 $\mathbb{R}^3$ 의 영역 S 가

$$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$S = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f_{xy}(x, y)\}$$

이고 모든 $(x, y) \in D$ 에 대하여 $f_{xy}(x, y) \geq 0$ 을 만족할 때, 영역 S 의 부피를 구하여라. (4점)

<풀이>

영역 D 에서의 함수 f_{xy} 의 이중적분이 부피와 같으므로 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f_{xy}(x, y) dA = \int_0^1 \int_0^1 f_{xy}(x, y) dy dx = \int_0^1 [f_x(x, y)]_0^1 dx \\ &= \int_0^1 \{f_x(x, 1) - f_x(x, 0)\} dx = [f(x, 1) - f(x, 0)]_0^1 \\ &= f(1, 1) - f(1, 0) - f(0, 1) + f(0, 0) \\ &= 4 - 0 - 1 - 0 = 3 \end{aligned}$$