명지 대학교

교과목	미적분학2		대학	대학 (자연 캠퍼스)					
			학과	학과/학부			점수		검인
담당교수	공동출제		학년		학번				
			성명						

2019 학년도 2학기 중간고사

※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.

※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 벡터 $\langle 6, 2, -3\rangle$와 방향이 같은 단위벡터를 구하여라. (6점)

<풀이> $|\vec{a}| = |\langle 6, 2, -3\rangle| = 7$이므로 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left\langle \dfrac{6}{7}, \dfrac{2}{7}, -\dfrac{3}{7} \right\rangle$이다.

2. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}$에 대하여 $f(x)$의 수렴구간과 $f'(x)$의 수렴구간을 구하여라. (6점)

<풀이> 비 판정을 적용하면,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)^2}}{\dfrac{x^{2n}}{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}x^2 = x^2 < 1$$ 이므로 $|x|<1$이고

$x=1$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 은 $p=2$인 $p-$급수이므로 수렴한다.

$x=-1$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 은 $p=2$인 $p-$급수이므로 수렴한다.

따라서 $f(x)$의 수렴구간은 $-1 \le x \le 1$이다.

$f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2nx^{2n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x^{2n-1}}{n}$에 대하여 $f'(x)$의 수렴반지름도 1이고

$x=1$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$는 조화급수이므로 발산한다.

$x=-1$ 일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{2n-1}}{n} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$는 조화급수이므로 발산한다.

따라서 $f'(x)$의 수렴구간은 $-1 < x < 1$이다.

3. 곡선 $x = t\cos t$, $y = t\sin t$ 위의 $t=\pi$인 점에서의 접선의 방정식을 구하여라. (6점)

<풀이> $t=\pi$인 점의 좌표는 $x=-\pi$, $y=0$이다.

접선의 기울기는 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}$, $t=\pi$일 때 $\dfrac{\sin\pi + \pi\cos\pi}{\cos\pi - \pi\sin\pi} = \pi$ 이다.

접선의 방정식은 $y = \pi(x+\pi)$이다.

4. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 의 수렴여부를 판정하여라. (6점)

<풀이> $f(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$ 이라 하면, f는 $x \ge 1$에서 양의 값, 연속, 감소함수이다. 또한

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx \\ &= \lim_{b\to\infty}\left\{b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - \ln 2 + 2\int_1^b \frac{1}{x^2+1}dx\right\} \\ &= \lim_{b\to\infty}\left\{b\ln\left(1+\frac{1}{b^2}\right) - \ln 2 + 2\left(\tan^{-1}b - \tan^{-1}1\right)\right\} \\ &= -\ln 2 + \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

이므로, 적분판정법에 의해 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 는 수렴한다.

5. 함수 $f(x)=\int_0^x e^{(3t-1)^2}\sin\frac{\pi t^2}{2}dt$의 매클로린 급수가 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 이고 수렴반지름 $R=\infty$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n a_n$의 값을 구하여라. (8점)

<풀이> $f(x)=\int_0^x e^{(3t-1)^2}\sin\frac{\pi t^2}{2}dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$을 미분하면, $e^{(3x-1)^2}\sin\frac{\pi x^2}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^{n-1}$이다.

양변에 x를 곱하면, $xe^{(3x-1)^2}\sin\frac{\pi x^2}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}n a_n x^n$이고

$x=-1$을 대입하면, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n a_n=-e^{16}$이다.

6. 극곡선 $r=\frac{1}{\sqrt{2\cos 2\theta}}$ $\left(-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$와 $r=1$의 개형을 좌표평면에 그리고 두 극곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라. (8점)

<풀이> 극방정식 $r=\frac{1}{\sqrt{2\cos 2\theta}}$의 양변을 제곱하면 $r^2=\frac{1}{2\cos 2\theta}$이고 $r^2\cos 2\theta=\frac{1}{2}$이다. $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$를 이용하여 직교좌표계로 바꾸면 주어진 극곡선이 쌍곡선 $x^2-y^2=\frac{1}{2}$이다. $r=\frac{1}{\sqrt{2\cos 2\theta}}$와 $r=1$를 연립하여 풀면 교점은 $\theta=\pm\frac{\pi}{6}\pi$ 이다.

대칭성을 고려하면 구하고자 하는 영역의 넓이는 $2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2\cos 2\theta}\right)d\theta$이다.

$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec 2\theta d\theta=\frac{1}{2}\ln(\sec 2\theta+\tan 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$임을 알면

구하고자 하는 넓이는 $\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{3})$이다.

※ 수고하셨습니다.