명지 대학교

교과목	미적분학2		대학	대학 (자연 캠퍼스)			점수		검인	
			학과	학과/학부						
담당교수	공동 출제		학년		학번					
			성명							

2022 학년도 2학기 기말고사

※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.
※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 이변수 함수 $f(x,y)=\sqrt{x+4y}$ 에 대하여 $a=f_x(1,0)$, $b=f_y(1,0)$이라 할 때, 두 수 a, b의 곱 ab의 값을 구하여라. (5점)

<풀이>

$f_x(x,y)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+4y}}$ 이고 $f_y(x,y)=\dfrac{4}{2\sqrt{x+4y}}=\dfrac{2}{\sqrt{x+4y}}$ 이다.

$a=f_x(1,0)=\dfrac{1}{2}$, $b=f_y(1,0)=2$ 이므로 $ab=1$이다.

2. $R=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2\}$일 때, $\iint_R ye^{xy}dA$의 값을 구하여라. (5점)

<풀이>

$$\iint_R ye^{xy}dA=\int_1^2\int_0^1 ye^{xy}dxdy=\int_1^2\left[e^{xy}\right]_0^1 dy$$

$$=\int_1^2(e^y-1)dy=\left[e^y-y\right]_1^2=(e^2-2)-(e-1)=e^2-e-1$$

3. 원기둥 $x^2+y^2=1$과 두 평면 $z=0$, $y+z=2$에 의해 둘러싸인 입체의 부피를 구하여라. (6점)

<풀이>

$D: x^2+y^2\le 1$

$$V=\iint_D(2-y)dA=\int_0^{2\pi}\int_0^1(2-r\sin\theta)rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{3}\sin\theta\right)d\theta$$

$=2\pi$

4. 다음 반복 적분을 계산하여라. (6점)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{y}}\int_0^x\cos(2x^2-y)dzdxdy$$

(풀이)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{y}}\int_0^x\cos(2x^2-y)dzdxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{y}}\cos(2x^2-y)[z]_0^x dxdy$$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{y}}x\cos(2x^2-y)dxdy$ ($t=2x^2-y$ 로 치환하면, $dt=4xdx$이고, $x=0$일 때 $t=-y$, $x=\sqrt{y}$일 때, $t=y$ 이므로)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{-y}^{y}\frac{1}{4}\cos t\,dt\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin t]_0^y dy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y\,dy$$

$$=\frac{1}{2}[-\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$$

5. 평면상의 점 (x,y)에서 온도는 $T(x,y)=x^2y+3xy^2$로 주어졌다고 하자. 단, T의 단위는 $^\circ C$이고 x,y의 단위는 미터(m)이다. 점 $P(1,2)$에서 점 $Q(2,3)$ 방향으로 온도의 변화율을 구하여라. (6점)

<풀이>

$\nabla T(x,y)=\langle 2xy+3y^2, x^2+6xy\rangle$이고

벡터 $v=\overrightarrow{PQ}=\langle 1,1\rangle$, $|v|=\sqrt{2}$ 이므로,

점 $P(1,2)$에서 점 $Q(2,3)$ 방향으로 온도의 변화율은

$$D_{\boldsymbol{u}}T(1,2)=\nabla T(1,2)\ \bullet\ \boldsymbol{u}=\langle 16,13\rangle \bullet \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle = \frac{29}{\sqrt{2}}$$

6. 폐집합 $D=\left\{(x,y)\mid \dfrac{x^2}{4}+y^2\le 1\right\}$상에서 함수 $f(x,y)=x^2+y^2$의 최댓값 a와 최솟값 b를 구하여라. (6점)

<풀이> 함수 f가 폐집합 D에서 연속이므로 폐구간 방법으로 최댓값과 최솟값을 구한다.

(1) $f_x=2x=0,\ f_y=2y=0 \Rightarrow f(0,0)=0$

(2) $g(x,y)=\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$라 하면,

$\nabla f(x,y)=\lambda\nabla g(x,y) \Leftrightarrow \langle 2x,2y\rangle=\lambda\left\langle \dfrac{x}{2}, 2y\right\rangle$

$(4-\lambda)x=0,\ (1-\lambda)y=0$이므로,

$\lambda=4$이면 $y=0\Rightarrow x=\pm 2,\ f(\pm 2,0)=4$

$x=0$이면 $y=\pm 1\Rightarrow f(0,\pm 1)=1$

$\lambda=1$이면 $x=0\Rightarrow y=\pm 1\Rightarrow f(0,\pm 1)=1$

$y=0$이면 $x=\pm 2\Rightarrow f(\pm 2,0)=4$

(1)과 (2)로부터, 함수 f의 최댓값은 $a=4$, 최솟값은 $b=0$이다.

7. 함수 $f(x,y)=2x-y+\arctan\dfrac{y}{x}$의 임계점을 구하고 분류(극대, 극소, 안장점)하여라. (6점)

풀이) 함수 f의 정의역은 $\{(x,y)\in R^2 \mid x\ne 0\}$이다.

$f_x(x,y)=2-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $f_y(x,y)=-1+\dfrac{x}{x^2+y^2}$이고 임계점은 $\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5}\right)$ 하나뿐이다.

($(0,0)$은 정의역에 포함되지 않음)

$f_{xx}(x,y)=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{xy}(x,y)=-\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$,

$f_{yy}(x,y)=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$이므로

$f_{xx}(\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5})=4$, $f_{xy}(x,y)=2$, $f_{yy}(x,y)=-4$이므로 안장점이다.

※ 수고하셨습니다.