명지 대학교

교과목	미적분학2		대학	대학 (자연 캠퍼스)		점수		검인
			학과	학과/학부				
담당교수	공동 출제		학년		학번			
			성명					

2022 학년도 2학기 중간고사

※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.
※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 벡터 $\boldsymbol{a}=\langle 2,3,6\rangle$과 같은 방향을 갖는 단위벡터를 구하여라. (5점)

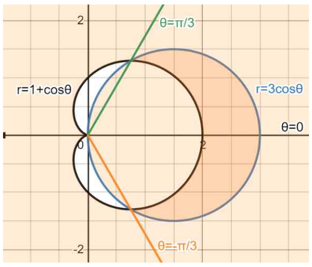
<풀이> $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4+9+36}=7$ 이므로 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left\langle \dfrac{2}{7},\dfrac{3}{7},\dfrac{6}{7}\right\rangle$이다.

2. 곡선 $x=t\cos t$, $y=\sin t$위의 $t=\pi$인 점에서 접선의 기울기를 구하여라. (5점)

<풀이> $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\cos t}{\cos t-t\sin t}$ 이므로 $m=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\pi}=1$이다.

3. 원 $r=3\cos\theta$의 내부와 극곡선 $r=1+\cos\theta$의 외부에 놓인 영역의 넓이를 구하여라. (6점)

<풀이>



$$A=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\{(3\cos\theta)^2-(1+\cos\theta)^2\}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(8\cos^2\theta-1-2\cos\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(4\cos2\theta+3-2\cos\theta)d\theta=[2\sin2\theta+3\theta-2\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}=\pi$$

4. 삼차원 좌표계에서 두 평면 $x-y=1$과 $x+z=3$에 대하여 다음 두 물음에 답하여라. (6점)

(1) 두 평면 $x-y=1$과 $x+z=3$ 사이의 각을 구하여라.

<풀이>

평면 P_1의 법선벡터는 $n_1=\langle 1,-1,0\rangle$, P_2의 법선벡터는 $n_2=\langle 1,0,1\rangle$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$

(2) 두 평면의 교선 L에 대한 매개방정식을 구하여라.

<풀이>

교선 L 위의 한 점을 $P_0(1,0,2)$라 하면, 방향벡터 $v=n_1\times n_2=\langle -1,-1,1\rangle$이므로

교선의 매개방정식은

$x=1-t,\ y=-t,\ z=2+t,\ t$는 임의의 실수

5. 곡선 $\boldsymbol{r}(t)=\langle 2\cos t, 2\sin t, 5-2\cos t\rangle$ 에 대하여 $t=\dfrac{\pi}{3}$에서 접선의 대칭 방정식을 구하여라. (6점)

<풀이> $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{3})=\left\langle 2\cos\frac{\pi}{3}, 2\sin\frac{\pi}{3}, 5-2\cos\frac{\pi}{3}\right\rangle=\langle 1, \sqrt{3}, 4\rangle$ 이고,

$\boldsymbol{r}'(t)=\langle -2\sin t, 2\cos t, 2\sin t\rangle$ 이므로

접선벡터 $\boldsymbol{r}'(\frac{\pi}{3})=\left\langle -2\sin\frac{\pi}{3}, 2\cos\frac{\pi}{3}, 2\sin\frac{\pi}{3}\right\rangle=\langle -\sqrt{3}, 1, \sqrt{3}\rangle$

이다. 따라서

$t=\dfrac{\pi}{3}$에서 접선의 대칭 방정식은

$\dfrac{x-1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{y-\sqrt{3}}{1}=\dfrac{z-4}{\sqrt{3}}$ 이다.

6. 곡선 $\boldsymbol{r}(t)=\left\langle t, \dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{6}\right\rangle$ 에 대하여 $0\le t\le 6$ 의 곡선의 길이를 구하여라.

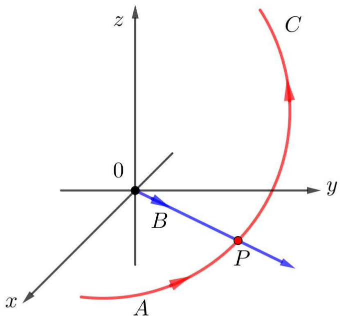
<풀이> $\boldsymbol{r}'(t)=\left\langle 1, t, \dfrac{t^2}{2}\right\rangle$ 이고

$|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{1+t^2+\dfrac{t^4}{4}}=\dfrac{t^2+2}{2}$이다.

따라서 $0\le t\le 6$ 의 곡선의 길이는

$\displaystyle\int_0^6|\boldsymbol{r}'(t)|dt=\int_0^6\frac{t^2+2}{2}\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}t^3+2t\right]_0^6=42$ 이다.

7. 아래 그림과 같이 좌표공간 위의 곡선 C 위를 움직이는 물체 A와 원점을 지나는 직선 위를 움직이는 물체 B가 있다. $\mathrm{r}_A(t)$와 $\mathrm{r}_\mathrm{B}(t)$가 각각 시간 t에 대한 A와 B의 위치벡터일 때, 다음 물음에 답하여라. (6점)



(1) $\mathrm{r}_A(t)=\langle t^2-4, 4t-4, t^2-8\rangle$라 할 때, 원점 $(0,0,0)$으로부터 물체 A가 가장 가까울 때의 시간 t와 그 때의 점 P의 좌표를 구하여라.

<풀이>

시간 t일 때의 원점으로부터의 거리를 d라 하고 $f(t)=d^2$라 하면

$$f(t)=d^2=(t^2-4)^2+(4t-4)^2+(t^2-8)^2$$

$=2t^4-8t^2-32t+96$

이다. 도함수를 구하면

$$f'(t)=8t^3-16t-32=8(t-2)(t^2+2t+2)$$

이므로 $t=2$일 때 $f(t)$는 최솟값을 갖는다.

그러므로

$t=2,\ (0,4,-4)$

(2) 물체 B가 초기위치 $\mathrm{r}_\mathrm{B}(0)=\langle 0,0,0\rangle$에서 초기속도 $\mathrm{v}_\mathrm{B}(0)=\mathrm{v}_0$로 출발하여 P방향으로 이동한다고 할 때, 두 물체 A, B가 점 P에서 만나기 위한 초기속도 v_0를 구하여라. (단, 물체 B의 가속도벡터는 $\mathrm{a}_B(t)=\langle 0,0,0\rangle$이다.)

<풀이>

물체 B가 원점에서 $P(0,4,-4)$방향으로 직선이동하므로

$$\mathrm{v}_0=k\langle 0,4,-4\rangle=\langle 0,4k,-4k\rangle$$

이고 $\mathrm{a}_B(t)=\langle 0,0,0\rangle$이므로

$$\mathrm{v}_B(t)=\mathrm{v}_0$$

이다. $\mathrm{r}_\mathrm{B}(0)=\langle 0,0,0\rangle$이므로 물체의 위치벡터 $\mathrm{r}_\mathrm{B}(\mathrm{t})$는

$$\mathrm{r}_\mathrm{B}(\mathrm{t})=t\langle 0,4k,-4k\rangle=\langle 0,4kt,-4kt\rangle$$

이다. 시간 $t=2$일 때 두 물체가 만나야 하므로 $\mathrm{r}_A(2)=\mathrm{r}_B(2)$에서

$$\langle 0,4,-4\rangle=\langle 0,8k,-8k\rangle \Rightarrow \quad k=\frac{1}{2}$$

그러므로 $\mathrm{v}_0=\langle 0,2,-2\rangle$이다.

※ 수고하셨습니다.