

교과목	미적분학1		대학	대학 (자연 캠퍼스)				점수		검인	
			학과	학과							
담당교수	공동출제		학년		학번						
			성명								

2022 학년도 1학기 기말고사

- ※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.
 ※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.
 ※ 각 5점씩 총 40점 만점임.

1. $\int \left(2\sin^2 x + \frac{1}{x(x+1)} \right) dx$ 를 계산하여라.

(풀이)

$$\text{준식} = \int \left(1 - \cos 2x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= x - \frac{\sin 2x}{2} + \ln|x| - \ln|x+1| + C$$

2. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n3^n}$ 의 수렴구간을 구하여라.

(풀이)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x-5|^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \cdot \frac{n3^n}{|x-5|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{3} |x-5| = \frac{|x-5|}{3} < 1$$

$$|x-5| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-5 < 3 \Leftrightarrow 2 < x < 8 \text{ 절대수렴}$$

(1) $x = 2, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

① $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ② $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ 이므로 교대급수판정법에

의해, 수렴

(2) $x = 8, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 발산 ($p=1$)

그러므로 수렴구간은 $[2, 8)$ 이다.

3. $y = \sec^2 x$ 과 $x = 0, y = 2$ 으로 둘러싸인 영역을 y 축에 대하여 회전할 때 얻어지는 입체의 부피를 구하여라.

(풀이) 부피 $V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi x (2 - \sec^2 x) dx$ 이므로

부분적분법을 사용하면, $u = x \rightarrow du = dx$

$$dv = (2 - \sec^2 x) dx \rightarrow v = 2x - \tan x \text{ 이고}$$

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi x (2 - \sec^2 x) dx$$

$$= 2\pi \left([2x^2 - x \tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x - \tan x) dx \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} - [x^2 - \ln|\sec x|]_0^{\frac{\pi}{4}} \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{16} + \ln|\sec \frac{\pi}{4}| \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} \right) = \frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi^2}{2} + \pi \ln 2$$

4. 함수 $f(x) = \ln(8-x)$ 를 멱급수로 나타내어라.

(풀이) $\frac{1}{8-x} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{8}} = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{8} \right)^n$

이고

$$\ln(8-x) = - \int \frac{1}{8-x} dx = - \frac{1}{8} \int \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{8} \right)^n dx = - \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)8^n} + C$$

이다. $x = 0$ 을 대입하면, $C = \ln 8$

이다.

따라서

$$f(x) = \ln(8-x) = - \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)8^n} + \ln 8$$

이다.

5. 곡선 $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x = \frac{1}{2}$ 그리고 y 축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

<풀이>

$$\begin{aligned}\text{넓이 } A &= \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \, dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= \left[\sin^{-1}x + \sqrt{1-x^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1\end{aligned}$$

6. 다음 급수가 절대수렴하는지, 조건부수렴하는지 또는 발산하는지 판정하여라.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$$

<풀이>

자연수 n 에 대하여 $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 라고 하면,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{\sqrt{n+2}} \text{이므로} \qquad \{b_n\} \text{은} \qquad \text{감소수열이고}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0 \text{이다.}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ 는 교대급수판정법에 의해 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \text{에 대하여, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \text{이고}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{은 발산급수이므로 극한비교판정법에 의해 발산한다.}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ 은 조건부수렴한다.

7. 적분 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ 을 구하여라.

풀이) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ 이다. $\sqrt{x} = u$ 로 치환하면

$$\int_t^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int_{\sqrt{t}}^1 2 \ln u^2 du = 4(u \ln u - u) \Big|_{\sqrt{t}}^1 = -4 - 4\sqrt{t} \ln \sqrt{t} + 4\sqrt{t}$$

이고 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} \ln \sqrt{t} = 0$, $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} = 0$ 이므로 정답은 -4 이다.

8. 미분 가능한 함수 f 가 있다. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 인 x 에 대해 점 $(0, f(0))$ 에서 점 $(x, f(x))$ 까지의 곡선 $y = f(x)$ 의 길이를 나타내는 호의 길이 함수가

$$s(x) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

일 때, 점 $(0, f(0))$ 에서 점 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 까지의 곡선 $y = f(x)$ 를 y 축에 대하여 회전시킨 회전체의 겉넓이를 구하여라.

(풀이)

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} \, dt = \sin x \text{이므로}$$

$$s'(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = \cos x$$

이다. 따라서 회전체의 겉넓이는

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x \cos x \, dx$$

$$= 2\pi \left\{ [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \right\}$$

$$= 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \pi(\pi - 2)$$

이다.