

교과목	미적분학1		대학	대학 (자연 캠퍼스)				점수		검인	
			학과	학과							
담당교수	공동출제		학년		학번						
			성명								

2020학년도 2학기 중간고사

※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.

※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 다음 함수를 x 에 관하여 미분하여라. [4점]

$$g(x) = 2\sqrt{4-x^2} + \sin^{-1} \frac{x}{2}$$

(풀이) $g(x) = 2(4-x^2)^{\frac{1}{2}} + \sin^{-1} \frac{x}{2}$ 이므로,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \cdot \frac{1}{2} (4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx} (4-x^2) + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x) + \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{-2x}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{1-2x}{\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

2. $y = \ln(x^2 + 2y^2)$ 일 때, y' 을 구하여라. [4점]

(풀이) 양변을 음함수 미분하면, $y' = \frac{2x+4yy'}{x^2+2y^2}$ 이므로

$$(x^2+2y^2-4y)y' = 2x \text{이고 따라서 } y' = \frac{2x}{x^2+2y^2-4y} \text{이다.}$$

3. 함수 $f(x)$ 는 분자와 분모가 모두 2차식으로 이루어진 유리함수이고, 수직 점근선은 $x=2$, x 절편은 -1 이다. f 는 $x=1$ 에서 제거가능한 불연속이며

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 을 구하여라. [4점]

(풀이) $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 수직점근선을 갖고, $x=1$ 에서 제거가능한 불연속이며 x 절편은 -1 인 유리함수이므로,

$$f(x) = \frac{a(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)} \text{이다.}$$

또, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x+1)}{(x-2)} = \frac{2a}{-1} = -3,$$

즉 $a = \frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $f(x) = \frac{3(x+1)(x-1)}{2(x-2)(x-1)}$ 이고,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3(x+1)(x-1)}{2(x-2)(x-1)} = \frac{3}{2} \text{이다.}$$

4. $f(x) = (1+x)^4$ 라고 할 때, $a=1$ 에서의 $f(x)$ 의 선형화를 구하고 이것을 이용하여 $(2.01)^4$ 의 근삿값을 구하여라. [4점]

(풀이)

$f(x) = (1+x)^4$ 의 도함수는 $f'(x) = 4(1+x)^3$ 이고,

$f(1) = 16$, $f'(1) = 32$ 이다. 그러므로 $f(x)$ 의 선형화는

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 16 + 32(x-1) = 32x - 16 \text{이다.}$$

$(2.01)^4$ 의 근삿값을 구하면

$$(2.01)^4 = f(1.01) \approx L(1.01) = 32 \times (1.01 - 1) + 16 = 16.32$$

5. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 3$ 일 때 다음을 구하여라. [8점]

- (1) $f(x)$ 의 감소구간을 구하여라.
- (2) $f(x)$ 의 극솟값을 구하여라.
- (3) 아래로 오목인 구간을 구하여라.

(풀이)

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x-3)^2$$

$$f''(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x^2 - 4x + 3) = 12(x-1)(x-3)$$

이므로 증감표를 그리면 아래와 같다.

x	...	0	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	+
$f''(x)$	+	+	+	0	-	0	+
$f(x)$	감소 CU	극소	증가 CU	변곡 CD	증가 CD	변곡 CD	증가 CU

- (1) 감소 구간 : $(-\infty, 0)$
- (2) 극솟값 : $f(0) = 3$
- (3) 아래로 오목인 구간 : $(1, 3)$

6. 곡선 $y = \frac{3}{4}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + 22x - 6$ 의 변곡점에서의 접선의 방정식을 구하여라. [8점]

(풀이)

$$f(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{5}{2}x^4 + 22x - 6 \text{라 하면 도함수 } f'(x) \text{는}$$

$$f'(x) = \frac{15}{4}x^4 - 10x^3 + 22$$

이다. 변곡점을 구하기 위해 이계도함수 $f''(x)$ 를 구하면

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = 15x^3 - 30x^2 = 15x^2(x-2)$$

이다. $x = 0, 2$ 에서 $f''(x) = 0$ 이므로, 다음과 같은 표를 얻을 수 있다.

구간	x^2	$x-2$	$f''(x) = 15x^2(x-2)$	오목함
$(-\infty, 0)$	+	-	-	아래로
$(0, 2)$	+	-	-	아래로
$(2, \infty)$	+	+	+	위로

$x = 2$ 에서 곡선이 아래로 오목에서 위로 오목으로 변하므로 이 점에서 변곡점을 갖는다.

$$f(2) = \frac{3}{4}2^5 - \frac{5}{2}2^4 + 22 \cdot 2 - 6 = 24 - 40 + 44 - 6 = 22$$

이므로 변곡점은 $(2, 22)$ 이다.

이 점에서 접선의 기울기를 계산하면

$$f'(2) = \frac{15}{4}2^4 - 10 \cdot 2^3 + 22 = 60 - 80 + 22 = 2$$

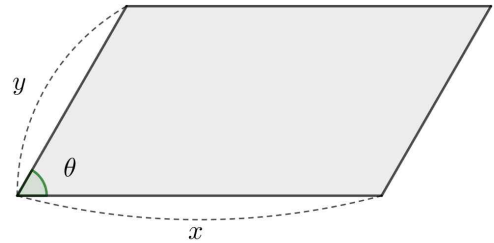
이다. 따라서 점-기울기 공식에 의해 접선의 방정식은

$$y - 22 = 2(x - 2) \text{ 또는 } y = 2x + 18$$

이다.

7. 이웃하는 두 변의 길이가 x, y 이고 사잇각이 θ 인 평행사변형의 넓이 S 는 다음과 같다.

$$S = xy \sin \theta$$



x 는 $5(\text{cm/sec})$ 의 속도로 커지고, y 는 $3(\text{cm/sec})$ 의 속도로 커지며, 넓이 S 는 $50(\text{cm}^2/\text{sec})$ 의 속도로 커진다고 한다.

$x = 5\sqrt{3}(\text{cm})$, $y = 3\sqrt{3}(\text{cm})$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때, 각의 크기는 얼마나 빨리 커지는가? [8점]

(풀이)

양변을 t 에 대해 미분하면

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dx}{dt} \times y \sin \theta + \frac{dy}{dt} \times x \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} \times xy \cos \theta$$

이고, $\frac{dS}{dt} = 50$, $\frac{dx}{dt} = 5$, $\frac{dy}{dt} = 3$ 이므로

$$50 = 5y \sin \theta + 3x \sin \theta + \frac{d\theta}{dt} \times xy \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{50 - 5y \sin \theta - 3x \sin \theta}{xy \cos \theta}$$

이다. 따라서, $x = 5\sqrt{3}(\text{cm})$, $y = 3\sqrt{3}(\text{cm})$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ 일 때, 각의 크기의 변화율은

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{x=5\sqrt{3}, y=3\sqrt{3}, \theta=\frac{\pi}{3}} &= \frac{50 - 5 \times 3\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} - 3 \times 5\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3}}{5\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} \times \cos \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{50 - \frac{45}{2} - \frac{45}{2}}{\frac{45}{2}} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

이다. 그러므로 답은 $\frac{2}{9}(\text{rad/sec})$ 이다.

수고 하셨습니다.