교과목	미적분학2	대학	대학 (자연 캠퍼스)			점수	검인
		학과	학과				
담당교수	공동출제	학년	학번				
		성명					

2020학년도 2학기 기말고사

※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.
 ※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 벡터함수 $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t, 4t \rangle$ 로 주어진 곡선에 대해 다음 물음에 답하여라. [8점]

(1) $t = \frac{\pi}{4}$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(풀이)

$t = \frac{\pi}{4}$ 일 때

$$\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\langle \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}, \pi \right\rangle = \langle 1, 1, \pi \rangle$$

이므로 접점의 좌표는 $(1, 1, \pi)$ 이고

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 4 \rangle$$

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left\langle -\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}, \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}, 4 \right\rangle = \langle -1, 1, 4 \rangle$$

이므로 $t = \frac{\pi}{4}$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-\pi}{4} \text{ 이다.}$$

정답: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-\pi}{4}$

(2) 점 $(\sqrt{2}, 0, 0)$ 에서 점 $(\sqrt{2}, 0, 8\pi)$ 까지 호의 길이를 구하여라.

(풀이)

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 t + 2\cos^2 t + 4^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{18} dt = 6\sqrt{2}\pi$$

정답: $6\sqrt{2}\pi$

2. 미분 가능한 이변수함수 $f(x, y)$ 가

$f(1, 2) = 2, f_x(1, 2) = 3, f_y(1, 2) = 4$ 를 만족시킨다.

함수 $u(x) = f(x, f(x, 2x))$ 에 대하여 $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = u'(1)$ 의 값을

구하여라. [6점]

(풀이)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x, 2x) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, 2x) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, 2x) \cdot \frac{d(2x)}{dx} \\ &= f_x(x, 2x) + 2f_y(x, 2x) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x, f(x, 2x)) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, f(x, 2x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x, 2x) \\ &= f_x(x, f(x, 2x)) + f_y(x, f(x, 2x)) \cdot [f_x(x, 2x) + 2f_y(x, 2x)] \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} u'(1) &= f_x(1, f(1, 2)) + f_y(1, f(1, 2)) \cdot (f_x(1, 2) + 2f_y(1, 2)) \\ &= f_x(1, 2) + f_y(1, 2) \cdot [f_x(1, 2) + 2f_y(1, 2)] \\ &= 3 + 4 \cdot (3 + 8) = 3 + 44 = 47 \end{aligned}$$

정답: 47

3. $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ 일 때, $\mathbf{v} = \langle 1, 2, -1 \rangle$ 방향으로 점 $P(1, -1, 3)$ 에서의 f 의 방향 도함수를 구하여라. [6점]

(풀이)

$\mathbf{v}$ 방향 단위벡터 $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right\rangle$ 이고

$\nabla f = \langle y + z, x + z, x + y \rangle$ 이다.

$\nabla f(1, -1, 3) = \langle 2, 4, 0 \rangle$ 이므로

$$D_{\mathbf{u}} f(1, -1, 3) = \nabla f(1, -1, 3) \cdot \mathbf{u}$$

$$= \langle 2, 4, 0 \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right\rangle$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

정답: $\frac{10}{\sqrt{6}}$

4. 곡면 $z = xy$ 아래에 놓이고 세 점 $(0,1), (1,2), (4,1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 영역 위에 놓인 입체도형의 부피를 구하여라. [6점]

(풀이)

세 점 $(0,1), (1,2), (4,1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 영역을 D 라 하면,

$$D: 1 \leq y \leq 2 \\ y-1 \leq x \leq 7-3y$$

따라서 입체도형의 부피 V 는

$$V = \iint_D xy dA = \int_1^2 \int_{y-1}^{7-3y} xy dx dy = \int_1^2 (24y - 20y^2 + 4y^3) dy = \frac{13}{3}$$

정답: $\frac{13}{3}$

5. 직육면체 $B = \{(x,y,z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \frac{\pi}{2}\}$ 에

대하여 삼중적분 $\iiint_B x e^{xy} \cos z dV$ 를 계산하여라. [6점]

(풀이)

$$\begin{aligned} \iiint_B x e^{xy} \cos z dV &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x e^{xy} \cos z dz dy dx \\ &= \left(\int_0^1 \int_0^1 x e^{xy} dy dx \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos z dz \right) \\ &= \left(\int_0^1 [e^{xy}]_0^1 dx \right) [\sin z]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \int_0^1 (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^1 = e - 2 \end{aligned}$$

정답: $e - 2$

6. 곡면 $z e^x \sin y = 1$ 위의 점 $P\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right)$ 에서의 단위 접선벡터를

$\mathbf{u}$ 라고 하자. $f(x,y,z) = y + z^2$ 일 때, $D_{\mathbf{u}} f\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right)$ 의 최댓값을 구하여라. [8점]

(풀이)

$\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$ 라고 하자.

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \langle a, b, c \rangle \cdot \nabla f\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right) = \langle a, b, c \rangle \cdot (0, 1, 2) = b + 2c$$

의 최댓값을 찾아야 한다.

단위벡터이므로 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ 이고

$\nabla(z e^x \sin y)(P) = \langle 1, 0, 1 \rangle$ 과 수직이어야 하므로 $a + c = 0$ 이다.

즉, 조건 $b^2 + 2c^2 = 1$ 을 만족하여야 한다.

$$D_{\mathbf{u}} f(P) = \langle a, b, c \rangle \cdot \nabla f\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right) = \langle a, b, c \rangle \cdot (0, 1, 2) = b + 2c$$

의 최댓값을 찾기 위해 라그랑주 승수법을 이용하면

$\lambda \langle 1, 2 \rangle = \langle 2b, 4c \rangle$ 와 $b^2 + 2c^2 = 1$ 를 만족시키는 b 와 c 에서

최댓값을 갖는다. $b = \frac{\lambda}{2}, c = \frac{\lambda}{2}$ 를 $b^2 + 2c^2 = 1$ 에 대입하여

$\frac{3}{4}\lambda^2 = 1$ 을 얻는다. 따라서 $\lambda = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 일 때 최댓값 $\sqrt{3}$,

$\lambda = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ 일 때 최솟값 $-\sqrt{3}$ 이다.

정답: $\sqrt{3}$

(별해)

주어진 조건 $a^2 + b^2 + c^2 = 1, a + c = 0, b^2 + 2c^2 = 1$ 로부터

$$\vec{u} = \langle a, \pm \sqrt{1-2a^2}, -a \rangle \quad (\text{단, } -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2})$$

따라서

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(P) &= \langle a, b, c \rangle \cdot \nabla f\left(0, \frac{\pi}{2}, 1\right) \\ &= \langle a, b, c \rangle \cdot (0, 1, 2) \\ &= \pm \sqrt{1-2a^2} - 2a \end{aligned}$$

그러므로 닫힌 구간 $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 함수

$h(a) = \sqrt{1-2a^2} - 2a$ 또는 $h(a) = -\sqrt{1-2a^2} - 2a$ 의 최댓값을 구하면 되므로 $h'(a) = 0$ 을 구하면 된다.

실제로 계산하면 $a = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고 양끝점 $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때의 함

숫값과 비교하면, $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때 최댓값 $\sqrt{3}$ 을 가짐을 알 수 있다.

수고하셨습니다.