명지 대학교

교과목	미적분학2		대학	대학 (자연 캠퍼스)		점수		검인
			학과	학과				
담당교수	공동출제		학년		학번			
			성명					

2020학년도 2학기 중간고사

※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.
※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 극곡선 $r=\sin\theta+\cos\theta$ 에 대하여 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 에서 접선의 방정식을 구하여라. [6점]

<풀이> $x=(\sin\theta+\cos\theta)\cos\theta$, $y=(\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta$ 이므로

$$\frac{dx}{d\theta}=(\cos\theta-\sin\theta)\cos\theta-(\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta$$

$$=\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta$$ 이고

$$\frac{dy}{d\theta}=(\cos\theta-\sin\theta)\sin\theta+(\sin\theta+\cos\theta)\cos\theta$$

$$=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta$$ 이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta}$$ 이다.

따라서 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $\frac{dy}{dx}=-1$ 이고 $x=1$, $y=1$이므로

접선의 방정식은 $y=-(x-1)+1=-x+2$ 이다.

정답: $y=-x+2$

2. 극곡선 $r=\cos k\theta$의 한 고리에 의해 둘러싸인 영역의 넓이가 $\frac{\pi}{25}$보다 작도록 하는 가장 작은 자연수 k의 값을 구하여라. [6점]

<풀이> 한 고리는 $-\frac{\pi}{2}\le k\theta\le\frac{\pi}{2}$, 즉 $-\frac{\pi}{2k}\le\theta\le\frac{\pi}{2k}$에 의해 만들어지므로

$$A=\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}}\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2k}}^{\frac{\pi}{2k}}\cos^2k\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2k}}\cos^2k\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2k}}\frac{1+\cos2k\theta}{2}d\theta$$

$$=\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2k\theta}{4k}\right]_0^{\frac{\pi}{2k}}=\frac{\pi}{4k}$$

따라서 $A=\frac{\pi}{4k}<\frac{\pi}{25}$를 만족시키는 가장 작은 자연수는 $k=7$이다.

정답: $k=7$

3. 3차원 벡터 $u=(1,1,1), v=(-2,1,1), w=(0,-3,3)$에 의해 결정되는 평행육면체가 직육면체임을 보이고, 그의 부피 V를 구하여라. [6점]

<풀이> $u\cdot v=0, u\cdot w=0, v\cdot w=0$이므로, 벡터 u,v,w는 서로 직교한다. 따라서 u,v,w에 의해 결정되는 평행육면체는 직육면체이다.

직육면체의 부피 V는

(풀이 1) 직육면체는 평행육면체이므로,

$$V=|(u\times v)\cdot w|=\left|\begin{vmatrix}1&1&1\\-2&1&1\\0&-3&3\end{vmatrix}\right|=18$$

(풀이 2) $u\times v=w=(0,-3,3), |w|=3\sqrt{2}$이므로 직육면체의 밑면적을 A, 높이를 h라 하면,

$A=|u\times v|=|w|=3\sqrt{2}$, $h=|w|=3\sqrt{2}$

따라서 $V=Ah=(3\sqrt{2})(3\sqrt{2})=18$

정답: 18

<뒷면 있음>

4. $\sin^2 x$의 매클로린 급수를 구하여라. [6점]

<풀이> $f(x) = \sin^2 x$이라고 놓으면

$f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$, $f'(0) = 0$이고

$f''(x) = 2\cos 2x$ 이므로 $f''(0) = 2$ 이고 규칙성을 찾으면

$f'''(x) = -2^2\sin 2x$ $\quad f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = -2^3\cos 2x$ $\quad f^{(4)}(0) = -2^3$

$f^{(5)}(x) = 2^4\sin 2x$ $\quad f^{(5)}(0) = 0$

$f^{(2n-1)}(0) = 0$이고 $f^{(2n)}(0) = (-1)^{n+1}2^{2n-1}$임을 알 수 있다.

매클로린 급수는 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$이다. .

정답: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$

5. 적절한 판정법을 이용하여 다음 급수가 수렴하는지 발산하는지 판정하여라. [8점]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!\times(b_1\times b_2\times\cdots\times b_n)}$$

단, 수열 $\{b_n\}$은 모든 항에 대해 $b_n > 0$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n = 3$이다.

<풀이> $a_n = \dfrac{n^n}{n!\times(b_1\times b_2\times\cdots\times b_n)}$ 라고 가정하면,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\times(b_1\times b_2\times\cdots\times b_n\times b_{n+1})}}{\dfrac{n^n}{n!\times(b_1\times b_2\times\cdots\times b_n)}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!\times(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\times b_{n+1}\times n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}e < 1$$

이므로 비판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.

정답: 수렴

6. 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}(x-5)^n$의 수렴구간을 구하여라. [8점]

<풀이> $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x-5|^{n+1}}{(2n+1)3^{n+1}}\frac{(2n-1)3^n}{|x-5|^n} = \frac{1}{3}|x-5| < 1$

$\Leftrightarrow$ $|x-5| < 3$ $\Leftrightarrow$ $2 < x < 8$ 절대수렴

(1) $x = 2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)3^n}(-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$

$0 < \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n-1}} = 2 < \infty$이고 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$은 발산$(p=1)$이므로

극한비교판정법에 의해, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$은 발산

(2) $x = 8$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$

① $\dfrac{1}{2n-1} < \dfrac{1}{2n+1}$ ② $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1} = 0$ 이므로

교대급수판정법에 의해 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$은 수렴

그러므로 수렴구간은 $(2,8]$이다.

정답: 수렴구간은 $(2,8]$

수고하셨습니다.