

교과목	미적분학1		대학	대학 (자연 캠퍼스)				점수		검인	
			학과	학과							
담당교수	공동출제		학년		학번						
			성명								

2020학년도 2학기 기말고사

- ※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.
 ※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$g(x) = \int_0^{x^2} \{f(t)+1\}dt$ 로 정의하였다. 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서

극댓값 10을 갖는다고 할 때, $f(4) + \int_0^4 f(x)dx$ 의 값을

구하여라. [8점]

(풀이)

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극댓값 10을 가지므로

$g'(2)=0$ 이고 $g(2)=10$ 이다.

$g(x) = \int_0^{x^2} \{f(t)+1\}dt$ 이므로 $g(2) = \int_0^4 \{f(t)+1\}dt = 10$ 이고

$\int_0^4 f(t)dt + \int_0^4 dt = 10$ 이다. 따라서 $\int_0^4 f(t)dt = 6$ 이다.

미적분학의 기본정리1에 의해

$g'(x) = 2x\{f(x^2)+1\}$ 이므로

$g'(2) = 4\{f(4)+1\} = 0$ 이고

$f(4) = -1$ 이다.

그러므로

$$f(4) + \int_0^4 f(x)dx = -1 + 6 = 5 \text{ 이다.}$$

정답: 5

2. 다음 정적분 값을 계산하여라. [6점]

$$\int_{-1}^1 x^4 (\tan x + 5) dx$$

(풀이)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^4 (\tan x + 5) dx &= \int_{-1}^1 (x^4 \tan x + 5x^4) dx \\ &= \int_{-1}^1 x^4 \tan x dx + \int_{-1}^1 5x^4 dx \end{aligned}$$

첫 번째 적분을 계산하기 위해 $f(x) = x^4 \tan x$ 라 하면

$$f(-x) = (-x)^4 \tan(-x) = x^4 (-\tan x) = -x^4 \tan x = -f(x)$$

이므로 $f(x)$ 는 기함수이다. 대칭함수 적분의 성질에 의해

$$\int_{-1}^1 x^4 \tan x dx = 0 \text{ 이다.}$$

두 번째 적분에서 피적분함수인 $5x^4$ 은 우함수이므로, 대칭함수 적분 성질을 이용하면

$$\int_{-1}^1 5x^4 dx = 2 \int_0^1 5x^4 dx = 2[x^5]_0^1 = 2(1-0) = 2$$

따라서

$$\int_{-1}^1 x^4 (\tan x + 5) dx = \int_{-1}^1 x^4 \tan x dx + \int_{-1}^1 5x^4 dx = 0 + 2 = 2$$

이다.

정답: 2

3. 타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위의 점 중에서 점 (1,0)과 가장 가까이 있는 점을 구하여라. [6점]

(풀이)

타원 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 위의 점을 (x,y) 라 하자. 그러면 점 (1,0)과 거리

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \text{ 이고,}$$

$$y^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \text{ 이므로}$$

$$f(x) = d^2 = (x-1)^2 + \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 2$$

라고 정의하여 $f(x)$ 의 최솟값을 구하면

$$f'(x) = \frac{3}{2}x - 2 \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{4}{3} \text{ 일 때, } f(x) \text{는 최솟값을 갖는다.}$$

그러므로 가장 가까운 점의 x 좌표는 $\frac{4}{3}$ 이고 y 좌표를 구하면

$$y^2 = 1 - \frac{x^2}{4} \text{ 에서}$$

$$y^2 = 1 - \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^2}{4} = \frac{5}{9}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ 이다.}$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}, \pm \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ 이다.

정답: $\left(\frac{4}{3}, \pm \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

4. 다음 이상적분이 수렴하는지 또는 발산하는지를 조사하여라.
그리고 수렴하는 경우에는 그 값을 구하여라. [6점]

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$$

(풀이)

먼저 부분적분법에 의하면

$$\int \frac{(\ln x)}{x^3} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \ln x - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} + C \text{ 이다. 따라서}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2} \ln x - \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} \right]_1^t$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t^2} - \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} = 0 \text{ 이고,}$$

$$\text{로피탈정리에 의해 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t^2} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx = \frac{1}{4} \text{로 수렴한다.}$$

정답: $\frac{1}{4}$ 로 수렴

5. 다음 적분을 계산하여라. [6점]

$$\int \frac{5x^2 - 4x + 3}{(2x-1)(x^2+2)} dx$$

(풀이)

$$\frac{5x^2 - 4x + 3}{(2x-1)(x^2+2)} \text{를 부분분수로 나타내면}$$

$$\frac{5x^2 - 4x + 3}{(2x-1)(x^2+2)} = \frac{1}{2x-1} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+2} \text{이다.}$$

따라서

$$\int \frac{5x^2 - 4x + 3}{(2x-1)(x^2+2)} dx = \int \left(\frac{1}{2x-1} + \frac{2x}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|2x-1| + \ln|x^2+2| - \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C$$

정답: $= \frac{1}{2} \ln|2x-1| + \ln|x^2+2| - \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C$

6. $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$)와 x 축으로 둘러싸인 영역에 대하여 다음을 구하여라. [8점]

(1) x 축으로 회전하여 생기는 입체의 부피 [4점]

(풀이)

$$V = \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} (\pi - 0) = \frac{\pi^2}{2}$$

정답: $\frac{\pi^2}{2}$

(2) y 축으로 회전하여 생기는 입체의 부피 [4점]

(풀이)

원통셀 방법과 부분적분을 이용하면

$$V = \int_0^{\pi} (2\pi x) \sin x dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$= 2\pi \left([-x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) dx \right)$$

$$= 2\pi (-\pi(-1) + [\sin x]_0^{\pi})$$

$$= 2\pi (\pi + 0) = 2\pi^2$$

정답: $2\pi^2$

수고 하셨습니다.