

교과목	미적분학1		대학	대학 (자연 캠퍼스)				점수		검인	
			학과	학과							
담당교수	공동출제		학년		학번						
			성명								

2020학년도 1학기 기말고사

- ※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.
 ※ 반드시 검정 연필 또는 샤프펜슬로 작성할 것.

1. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$ 를 계산하여라. [5점]

(풀이)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos 2x}{3} = \frac{2}{3}$$

$\frac{0}{0}$ 꼴이므로 로피탈 법칙 사용

(b) $\int \left(\frac{1}{x+1} + e^{3x} \right) dx$ 를 계산하여라. [5점]

(풀이) $\frac{1}{x+1}$ 의 적분, e^{3x} 의 적분

$$\int \left(\frac{1}{x+1} + e^{3x} \right) dx = \ln|x+1| + \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

2. 연속함수 $f(x)$ 가 $\int_a^x (x^2 - t)f(t)dt = \int_a^x (t^2 + t)f(t)dt - x^2$

를 만족시킬 때, $f(a)$ 의 값을 구하여라. [10점]

(풀이)

$$\int_a^x (x^2 - t)f(t)dt = x^2 \int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$$

이므로, 준식을 x 로 미분하면,

$$2x \int_a^x f(t)dt + x^2 f(x) - xf(x) = (x^2 + x)f(x) - 2x$$

이다. 이 식을 정리하면,

$$2x \int_a^x f(t)dt = 2xf(x) - 2x$$

이고

$$\int_a^x f(t)dt = f(x) - 1 \text{ 이다.}$$

여기에, $x=a$ 를 대입하면 $f(a)=1$ 을 얻는다.

3. 곡선 $y^2 e^{2x} = 3y + x^2$ 위의 점 $(0, 3)$ 에서 접선의 방정식을 구하여라. [10점]

(풀이)

음함수 미분법을 사용하여

$$2yy'e^{2x} + 2y^2 e^{2x} = 3y' + 2x$$

$$\rightarrow y' = \frac{2x - 2y^2 e^{2x}}{2ye^{2x} - 3} \text{ 을 얻으면}$$

$$(0, 3) \text{을 대입하여 } y' = -6$$

접선의 방정식은 $y = -6x + 3$ 이다.

4. 곡선 $y = 2x^2 - x^3$ 과 x 축으로 둘러싸인 영역을 x 축을 회전축으로 하여 얻은 입체의 부피를 V_1 , y 축을 회전축으로 하여 얻은 입체의 부피를 V_2 라 할 때, $\frac{V_1}{V_2}$ 를 구하여라. [10점]

(풀이)

$$y = 2x^2 - x^3 \text{과 } x \text{축의 교점은}$$

$$0 = 2x^2 - x^3 = x^2(2 - x), x = 0, 2$$

따라서 회전체의 부피

$$V_1 = \int_0^2 \pi (2x^2 - x^3)^2 dx = \frac{128}{105} \pi$$

$$V_2 = \int_0^2 2\pi x (2x^2 - x^3) dx = \frac{16}{5} \pi$$

$$\text{그러므로 } \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{21}$$

5. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx$ 를 구하여라. [10점]

(풀이)

[방법 1] (부분적분법)

$$u = -\frac{1}{2}x, \quad dv = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \text{로 놓으면}$$

$$du = -\frac{1}{2}dx, \quad v = \frac{1}{x^2+1}$$

부분적분법을 적용하면

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx &= -\frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C \end{aligned}$$

[방법 2] (삼각치환법)

$$x = \tan \theta \text{로 놓으면 } dx = \sec^2 \theta d\theta$$

이고

$$x^2 + 1 = \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

따라서

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\tan^2 \theta}{\sec^4 \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

즉

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx &= \int \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta + C \\ &= \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + C \end{aligned}$$

오른쪽 직각삼각형에서

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

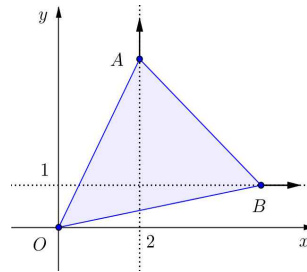
이고 $\theta = \tan^{-1} x$ 이므로

$$\begin{aligned} \therefore \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx &= \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + C \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \frac{x}{x^2+1} + C \end{aligned}$$

6. 좌표평면 위에 아래 그림과 같이 직선 $x=2$ 위를 움직이는 점 A 와 직선 $y=1$ 위를 움직이는 점 B 가 있다. 점 A 는 y 축의 양의 방향으로 초속 6의 비율로 위로 이동하고, 삼각형 OAB 의 넓이는 초속 30의 비율로 증가할 때, $A(2,4)$, $B(4,1)$ 일 때의 점 B 의 x 축의 방향으로 이동하는 변화율을 구하여라. [15점]

(풀이)

시간 t 일 때의 점 A 의 좌표와 B 의 좌표를 각각 $A(2,y)$, $B(x,1)$ 이라 하자. 그러면 삼각형 OAB 의 넓이 S 가



$$S = xy - \frac{1}{2}x - y - \frac{1}{2}(x-2)(y-1) = \frac{1}{2}xy - 1$$

이므로,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}x \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y \frac{dx}{dt}$$

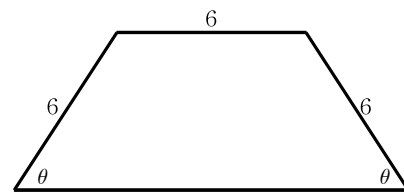
이고, 문제 조건에 의해 $\frac{dy}{dt} = 6$, $\frac{dS}{dt} = 30$ 이므로

$$30 = 3x + \frac{1}{2}y \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{60-6x}{y}$$

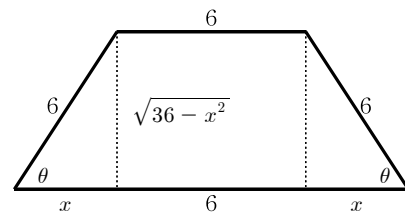
이고, $x=4$, $y=4$ 일 때, $\frac{dx}{dt} = \frac{60-24}{4} = 9$ 이다.

7. 아래와 같은 등변사다리꼴의 넓이가 최대가 될 때 밑변의 길이를 구하여라. [15점]



(풀이)

[방법 1] 밑변의 길이는 $6+2x$ 이고 높이는 피타고라스 정리에 의해 $\sqrt{36-x^2}$ 이다. 따라서 사다리꼴의 넓이를 S 라 하면



$$S(x) = \frac{1}{2}(2x+6)\sqrt{36-x^2} = (x+3)\sqrt{36-x^2}$$

이다. S 의 도함수를 구하면

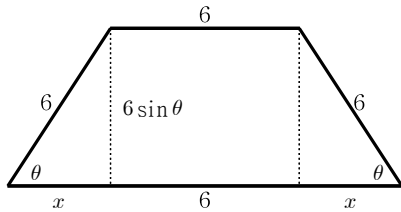
$$\begin{aligned} S'(x) &= 1 \cdot \sqrt{36-x^2} + (x+3) \frac{-2x}{2\sqrt{36-x^2}} \\ &= \frac{(36-x^2) - x(x+3)}{\sqrt{36-x^2}} = \frac{36-6x-3x^2}{\sqrt{36-x^2}} \end{aligned}$$

$S'(x) = 0$ 이 되는 값은 이차방정식

$0 = 36 - 6x - 2x^2 = -2(x-3)(x+6)$ 의 해이고 $0 < x < 6$ 이어야 하므로 $x = 3$ 이다. $x = 3$ 의 왼쪽 부분에서 $S'(x) > 0$ 이고 $x = 3$ 의 오른쪽 부분에서 $S'(x) < 0$ 이므로 사다리꼴의 넓이 S 는 $x = 3$ 에서 최대가 된다.
 그러므로 밑변의 길이는 $6 + 2x = 6 + 2 \cdot 3 = 12$ 이다.

[방법 2]

등변 사다리꼴을 아래와 같이 나타내면



밑변의 길이는 $6 + 2x$ 이고 높이는 사인 함수의 정의를 이용하면 $6 \sin \theta$ 이다. 코사인 함수의 정의에 의해 $x = 6 \cos \theta$ 이므로 사다리꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times (12 + 12 \cos \theta) \times 6 \sin \theta = 36 \sin \theta (\cos \theta + 1)$$

이다. S 의 도함수를 구하면

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= 36 [\cos \theta (\cos \theta + 1) + \sin \theta (-\sin \theta)] \\ &= 36 (\cos^2 \theta + \cos \theta - \sin^2 \theta) \\ &= 36 [\cos^2 \theta + \cos \theta - (1 - \cos^2 \theta)] \\ &= 36 (2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1) \\ &= 36 (2\cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) \end{aligned}$$

$S'(\theta) = 0$ 이 되는 값은 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, -1 이고 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이어야 하므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이다. $\theta = \frac{\pi}{3}$ 의 왼쪽 부분에서 $S'(\theta) > 0$ 이고 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 의 오른쪽 부분에서 $S'(\theta) < 0$ 이므로 사다리꼴의 넓이 S 는 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 에서 최대가 된다.

그러므로 밑변의 길이는 $6 + 2x = 6 + 2 \cdot \left(6 \cos \frac{\pi}{3}\right) = 12$ 이다.

수고 하셨습니다.