

교과목	미적분학1		대학	대학 (자연 캠퍼스)				점수		검인		
			학과	학과/학부								
담당교수	공동출제		학년		학번							
			성명									

2019 학년도 1학기 중간고사

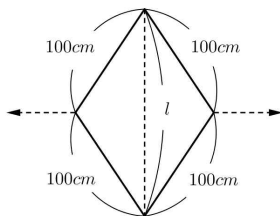
※ 계산 과정은 상세히 서술할 것.

※ 반드시 검정 연필 또는 사프펜슬로 작성할 것.

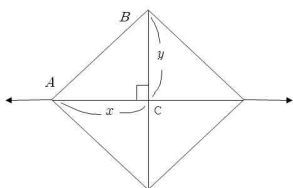
1. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right)$ 의 값을 구하여라. (5점)

<풀이> $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-x} = -\infty$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \tan^{-1}\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\frac{\pi}{2}$ 이다.

2. 100 cm 길이의 끈은 철사 4개의 양 끝을 연결하여 마름모 형태의 구조물을 만들었다. 마름모의 두 대각선 중 한 대각선의 양 끝을 잡고 같은 속력으로 잡아당겨서 대각선의 길이를 매 초 4cm씩 늘린다고 할 때, 이 대각선의 길이가 160cm이 되는 순간 나머지 대각선 길이 l 의 증가율을 구하시오. (단, 최초제작 시 l 은 160cm보다 크다.) (5점)



<풀이>



두 대각선의 교점을 C , 마름모의 서로 이웃하는 두 꼭짓점을 A, B 라 하면 삼각형 ABC 는 직각삼각형이다. $\overline{AC} = x$, $\overline{BC} = y$ 라 두면 피타고라스정리에 의해 $x^2 + y^2 = 100^2$ 이다.

양변을 t 에 대해 미분하면 $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$ 이고 $\frac{dx}{dt} = 2$ 이므로

로 $\frac{dy}{dt} = -\frac{2x}{y}$ 이다.

문제의 조건에 의해 잡아당기는 대각선의 길이가 160cm일 때,

$x = 80$, $y = 60$ 이므로 $\frac{dy}{dt} = -\frac{8}{3}$ 이다.

따라서 한 대각선의 길이가 160cm가 되는 순간 나머지 대각

선의 길이의 증가율은 $\frac{dl}{dt} = 2 \frac{dy}{dt} = -\frac{16}{3}$ 이다.

3. $(3x)^y = y^{3x}$ 일 때, y' 을 구하여라. (5점)

<풀이> 양변에 자연로그를 취하면,

$$y \ln 3x = 3x \ln y$$

이고 미분하면,

$$y' \ln 3x + \frac{y}{x} = 3 \ln y + 3x \frac{y'}{y}$$

이고

$$y' = \frac{3 \ln y - \frac{y}{x}}{\ln 3x - \frac{3x}{y}} = \frac{3xy \ln y - y^2}{xy \ln 3x - 3x^2}$$

이다.

4. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 6}$ 의 점근선을 구하고 증가, 감소, 오목성(증강 표)을 고려하여 $f(x)$ 의 그래프를 그려라. (5점)

<풀이> $f(-x) = f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 y 축대칭이다.

수평점근선은 $y = 1$ 이고 수직점근선은 $x = \sqrt{6}$ 과 $x = -\sqrt{6}$ 이다. <간단한 계산이므로 아래의 근거 없어도 됨.

($\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 6} = 1$ 이고 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 6} = 1$ 이므로 수평점근선은

$y = 1$

$\lim_{x \rightarrow \sqrt{6}^+} \frac{x^2}{x^2 - 6} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \sqrt{6}^-} \frac{x^2}{x^2 - 6} = -\infty$ 이고

$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}^+} \frac{x^2}{x^2 - 6} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}^-} \frac{x^2}{x^2 - 6} = \infty$ 이므로 수직점근선은

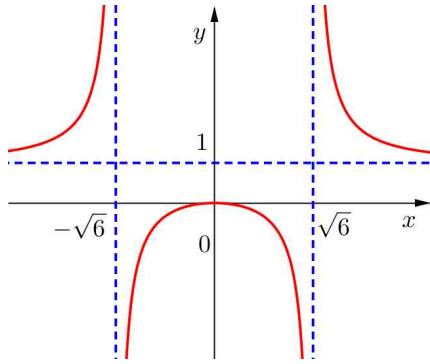
$x = \sqrt{6}$ 과 $x = -\sqrt{6}$)

$f'(x) = \frac{-12x}{(x^2 - 6)^2}$, $f''(x) = \frac{36(x^2 + 2)}{(x^2 - 6)^3}$ 이므로 대칭성과 임계수를

고려하여 증감표를 그리면,

x	0		$\sqrt{6}$	
$f(x)$	0	$\searrow$	X	$\swarrow$
$f'(x)$	0	-	X	-
$f''(x)$		-		+

대칭성과 증감표를 고려하여 그래프를 그리면,



이다.

5. 함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \cos x$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자.

함수 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 를

$$h(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + g^{(4)}(1)(x-1)^4$$

로 정의할 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[nh''\left(\frac{n+1}{n}\right) + g\left(\frac{n+1}{n}\right) \right]$$

의 값을 구하시오. (8점)

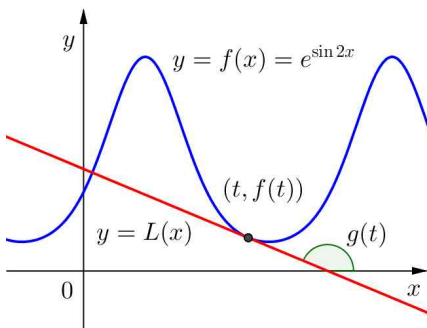
<풀이> 함수 h 의 정의로부터 $h''(1) = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[nh''\left(\frac{n+1}{n}\right) + g\left(\frac{n+1}{n}\right) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h''\left(1 + \frac{1}{n}\right) - h''(1)}{\frac{1}{n}} + g(1) \\ &= h'''(1) + g(1) \end{aligned}$$

$f(0) = 1$ 이므로 $g(1) = 0$ 이고 $h'''(1) = 0$ 이다.

따라서 정답은 0이다. (8점)

6. 함수 $f(x) = e^{\sin 2x}$ 의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 방정식을 $y = L(x)$ 라 하고, 이 직선이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $g(t)$ 라 하자. (아래 그림을 참조하여라.)



(1) 점 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 에서의 접선과 법선의 방정식을 구하여라. (5

점)

<풀이> $f'(x) = 2e^{\sin 2x} \cos 2x$ 이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ 이다. 따

라서, 접선의 방정식은

$$y = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = -2x + 1 + \pi$$

이고 법선의 방정식은

$$y = 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{\pi}{4}$$

이다.

(2) $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 의 값을 구하여라. (참고: 직선 $y = mx + b$ 와 x 축의 양의 방향과 이루는 각을 α 라 하면 $\tan \alpha = m$ 이 성립한다.) (7점)

<풀이> 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기가

$$f'(t) = 2e^{\sin 2t} \cos 2t$$

이므로

$$\tan(g(t)) = 2e^{\sin 2t} \cos 2t$$

에서

$$g(t) = \tan^{-1}(2e^{\sin 2t} \cos 2t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g'(t) &= \frac{2e^{\sin 2t} \cdot (-2\sin 2t) + 2 \cdot 2e^{\sin 2t} \cos 2t \cdot \cos 2t}{1 + \{2e^{\sin 2t} \cos 2t\}^2} \\ &= \frac{-4e^{\sin 2t} \sin 2t + 4e^{\sin 2t} \cos^2 2t}{1 + 4e^{2\sin 2t} \cos^2 2t} \end{aligned}$$

이고, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{5}$ 이다.

수고 하셨습니다.