

모든 문제의 풀이과정을 최대한 상세히 기술하세요.

1.4 지수함수

1. 함수 $y = 1 - e^x$ 의 그래프의 대략적인 모양을 그려라.

답: 직접적인 답이 되어 제시할 수 없습니다.

2. $y = e^x$ 의 그래프를 이용하여 아래와 같이 시행한 그래프를 그리고 그래프의 방정식을 구하여라.

(a) 직선 $y = 2$ 에 대하여 대칭

답: 그림은 학생들이, $y = 4 - e^x$,

(b) 직선 $x = 4$ 에 대하여 대칭

답: 그림은 학생들이, $y = e^{-x+8}$

3. 지수함수 $y = Cb^x$ 가 $\left(1, \frac{4}{3}\right)$, $(-1, 3)$ 을 지날 때, C 와 b 의 값을 구하시오.

답: $C = 2$, $b = \frac{2}{3}$

1.5 역함수와 로그

1. $f(x) = x^5 + x$ 에 대하여 $f^{-1}(2)$ 와 $f(f^{-1}(1))$ 의 값을 구하여라.

답: 1, 1

2. $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$ 일 때, 역함수 $f^{-1}(x)$ 를 구하여라.

답: $\ln \frac{1+x}{1-x}$

3. $f(x) = \ln(x-1) - 2$ 에 대하여

(a) f 의 정의역과 치역을 구하여라.

(b) f 의 x 절편을 구하여라.

(c) f 의 그래프를 그려라.

답: (a) 정의역 $\{x : x > 1\}$, 치역은 실수전체

(b) $e^2 + 1$

(c) 생략

4. 다음 방정식을 x 에 관하여 풀어라.

(a) $2^{x-3} = 5$

답: $x = \log_2 5 + 3$

(b) $\ln x + \ln(x+1) = 1$

답: $x = \frac{-1 + \sqrt{1+4e}}{2}$

5. 다음을 계산하여라.

(1) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

답: $\frac{\pi}{4}$

(2) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

답: $\frac{5\pi}{6}$

6. 다음 표현을 간단히 하여라.

$\cos(\tan^{-1}x)$

답: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

2.2 함수의 극한

1. 연습문제 9번

2. 연습문제 11번

3. 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x+1}{x-5}$

답: $-\infty$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

답: ∞

2.3 극한법칙을 이용한 극한 계산

1. 극한이 존재한다면 그 값을 구하여라.

(1) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 - 4}{h}$

답: -4

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1}$$

$$\text{답: } \frac{3}{4}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\text{답: } 1$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$\text{답: } 3x^2$$

2. 모든 x 에 대해 $3x \leq f(x) \leq \frac{3}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 3$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값을 구하여라.

$$\text{답: } 3$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 1 \\ (x-2)^2, & x \geq 1 \end{cases} \text{에 대하여,}$$

(1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 를 구하여라.

$$\text{답: } 3, 1$$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하는가?

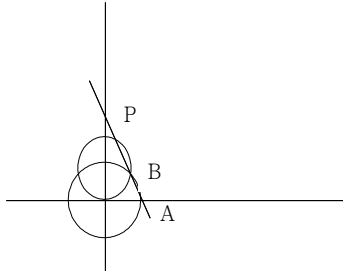
답: 존재하지 않는다. 이유는 기술하세요.

(3) f 의 그래프를 그려라.

4. $\lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^2 + t - 2}{3t^2 + at + a + 3}$ 의 값이 존재하게 되는 a 의 값과 그 때의 극한값을 구하여라. (단, 극한값은 0이 아니다).

$$\text{답: } 15, -1$$

5. 두 원 $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$, $C_2 : x^2 + y^2 = r^2$ ($0 < r < 2$)과 점 $A(r, 0)$ 에 대하여, 두 원의 교점 중 A 에 가까운 점을 B 라 하고, A 와 B 를 지나는 직선이 y 축과 만나는 점을 $P(0, f(r))$ 라 할 때, $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r)$ 의 값을 구하여라.



답: 4

2.5 연속성

1. $f(x) = \begin{cases} 2^x & x < -1 \\ 2x+3 & x \geq -1 \end{cases}$ 이 $x = -1$ 에서 불연속임을 보여라.

2. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x \leq 2 \\ (x-2)^2-1, & x \geq 2 \end{cases}$ 가 불연속이 되는 점을 구하여라. 그 점들은 f 가 오른쪽으

로 연속인가? 또는 왼쪽으로 연속인가? 또는 둘 다 아닌가? f 의 그래프를 그려라.

답: $x = 0$ 에서 불연속, 왼쪽으로 연속. 그래프는 학생들이 그리세요.

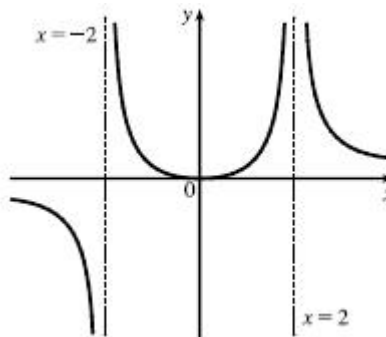
3. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x < 1 \\ ax^2-bx+3, & 1 \leq x \leq 2 \\ 2x-a+b, & x > 2 \end{cases}$ 가 항상 연속이 되게하는 a, b 의 값을 구하여라.

답: $a = 2, b = 3$

4. 중간값 정리를 활용하여 $\sqrt[3]{x} = 1-x$ 의 해가 구간 $(0,1)$ 에 존재함을 보여라.

2.6 무한대에서 극한: 수평점근선

1. 함수 f 의 그래프가 주어져 있다. 다음을 구하여라.



(1) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(2) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

(3) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$$

$$(6) f(0)$$

답: 풀이과정 없이 답만 적으면 되므로 정답을 주기 어렵습니다. 학생들께서 해결하세요.

2. 다음 극한값을 구하여라.

$$(1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + t\sqrt{t}}{-3t^{\frac{3}{2}} + 2t - 3}$$

$$\text{답: } -\frac{1}{3}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^8 + x}}{x^4 + 2}$$

$$\text{답: } 2$$

$$(3) \lim_{t \rightarrow -\infty} (t + \sqrt{t^2 + 2t})$$

$$\text{답: } -1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$$

$$\text{답: } -1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos^4 x}{e^x + e^{-2x}}$$

$$\text{답: } 0$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1}(\ln x)$$

$$\text{답: } \frac{\pi}{2}$$

3. 다음 곡선의 수직점근선과 수평점근선을 구하여라.

$$y = \frac{x^2 - 1}{3x^2 + 8x + 5}$$

$$\text{답: } x = -\frac{5}{3}, y = \frac{1}{3}$$

2.7 미분계수와 변화율

1. 곡선의 주어진 점에서 접선의 기울기를 구하여라. (3장 미분공식이용하지 말고 미분계수 정의를 이용하세요.)

$$y = \sqrt{x}, \quad (4, 2)$$

답: $\frac{1}{4}$

2. $a = 1$ 에서 접선의 방정식이 $y = 2x + 1$ 일 때, $f(1)$, $f'(1)$ 의 값을 구하여라.

답: $f(1) = 3$, $f'(1) = 2$

3. $f(x) = x^3 - 4$ 일 때 $f'(1)$ 을 구하고, 이것을 이용하여 $(1, -3)$ 에서 접선의 방정식을 구하여라. (3장 미분공식이용하지 말고 미분계수 정의를 이용하세요.)

답: $f'(1) = 3$, $y = 3x - 6$

4. 어떤 수 a 에서 어떤 함수 f 의 도함수의 극한표현을 적은 것이다. 함수 f 와 a 를 구하여라.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + h)}{h}$$

답: $f(x) = \sin x$, $a = \pi$

2.8 함수로서 도함수

1. $f(x) = x - \sqrt{x}$ 일 때, 도함수의 정의를 이용하여 함수 f 의 도함수를 구하여라. 또한, 함수 f 의 정의역과 도함수 f' 의 정의역을 구하여라. (3장 미분공식이용하지 말고 도함수 정의를 이용하세요.)

답: $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, f 의 정의역 $[0, \infty)$, f' 의 정의역 $(0, \infty)$

2. 연습문제 41번

3.1 다함함수와 지수함수의 도함수

1. 다음 함수를 미분하여라.

(1) $f(x) = 4e^x - \sqrt[4]{x}$

답: $f'(x) = 4e^x - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

(2) $g(t) = \frac{t + \sqrt{t}}{t^2}$

답: $g'(t) = -\frac{1}{t^2} - \frac{3}{2\sqrt{t^5}}$

(3) $y = e^{x+2} - 3$

답: $y' = e^{x+2}$

2. 주어진 점에서 곡선의 접선의 방정식을 구하여라.

$$y = \sqrt[4]{x} + x, \quad (1, 2)$$

답: $y = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}$

3. $f(x) = e^x - 3x$ 의 그래프가 수평접선을 갖는 x 의 값을 구하여라.

답: $x = \ln 3$

4. $y = x^4 + 1$ 의 접선 중 $4x - y = 30$ 과 평행한 접선의 방정식을 구하여라.

답: $y = 4x - 2$

5. 곡선 $y = ax^2$ 의 $x = 2$ 에서 접선의 방정식이 $y = -2x + b$ 일 때, a , b 의 값을 구하여라.

답: $a = -\frac{1}{2}$, $b = 2$

3.2 곱 법칙과 몫 법칙

1. 다음을 미분하여라.

(1) $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$

답: $\frac{e^x(2-x)}{(1-x)^2}$

(2) $g(t) = e^t(t + 2\sqrt{t})$

답: $e^t\left(t + 2\sqrt{t} + 1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

2. $f(x) = \sqrt{x}e^x$ 에 대하여, $f'(x)$ 와 $f''(x)$ 를 구하여라.

답: $\frac{(1+2x)e^x}{2\sqrt{x}}$, $\frac{-1+4x+4x^2}{4x^{\frac{3}{2}}}e^x$

3. $(0,0)$ 에서 곡선 $f(x) = \frac{2x}{4-x^2}$ 의 접선과 법선의 방정식을 구하여라.

답: $y = \frac{1}{2}x$, $y = -2x$

4. $f(0) = 1$, $f'(0) = 6$, $g(0) = -3$, $g'(0) = 2$ 일 때, $(fg)'(0)$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$, $\left(\frac{g}{f}\right)'(0)$ 의 값을 구하여라.

답: -16 , $-\frac{20}{9}$, 20

5. g 가 미분가능한 함수일 때, 다음 함수의 도함수의 표현을 구하여라.

(1) $y = x^2g(x)$

답: $2xg(x) + x^2g'(x)$

(2) $y = \frac{x^2}{g(x)}$

답: $\frac{2xg(x) - x^2g'(x)}{g(x)^2}$

(3) $y = \frac{f(x)}{x^2}$

답: $\frac{xf'(x) - 2f(x)}{x^3}$

(4) $y = \frac{xg(x) + 1}{\sqrt{x}}$

답: $\frac{xg(x) + 2x^{\frac{3}{2}}g'(x) - 1}{2x^{\frac{3}{2}}}$

3.3 삼각함수의 도함수

1. 다음을 미분하여라.

(1) $f(\theta) = \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$

답: $\frac{1}{1 - \sin\theta}$

(2) $g(x) = \frac{x \sin x}{1 + x}$

답: $\frac{\sin x + x(1 + x)\cos x}{(1 + x)^2}$

2. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$ 이고 $g(x) = f(x)\sin x$, $h(x) = \frac{\cos x}{f(x)}$ 일 때, $g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $h'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 의 값을 구하여라.

답: $-1 + 2\sqrt{3}$, $\frac{-2 + \sqrt{3}}{16}$

3. $f(x) = e^x \sin x$ 에 대하여 수평접선을 갖는 x 의 값을 구하여라.

답: $x = n\pi + \frac{3}{4}\pi$

4. 다음 극한을 구하여라.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin \pi x}$

답: $\frac{5}{\pi}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{7x^{10} - 2x}$

답: $-\frac{5}{2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^2 + 3x + 2}$

답: -1

5. 규칙을 관찰하여 다음 도함수를 구하여라.

$$\frac{d^{99}}{dx^{99}}(\cos x)$$

답: $\sin x$

3.4 연쇄법칙

1. 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y = \tan(\cos x)$

답: $y' = -\sin x \sec^2(\cos x)$

(2) $y = \sqrt{1 - e^x}$

답: $y' = -\frac{e^x}{2\sqrt{1 - e^x}}$

(3) $f(x) = x \cos \pi x$

답: $f'(x) = \cos \pi x - \pi x \sin \pi x$

(4) $g(x) = e^{x^3 + 2x}$

답: $g'(x) = (3x^2 + 2)e^{x^3 + 2x}$

(5) $y = x^3 e^{-2x}$

답: $y' = 3x^2 e^{-2x} - 2x^3 e^{-2x}$

(6) $y = \tan(\sec(\cos x))$

답: $y' = -\sec^2(\sec(\cos x)) \sec(\cos x) \tan(\cos x) \sin x$

2. $f(x) = \cos(\sin 3x)$ 일 때, $f'(x)$ 과 $f''(x)$ 을 구하여라.

답: $f'(x) = -3\cos 3x \sin(\sin 3x)$, $f''(x) = -9\cos^2 3x \cos(\sin 3x) + 9\sin 3x \sin(\sin 3x)$

3. 곡선 $f(x) = 2^x$ 의 $x = 0$ 에서 접선의 방정식을 구하여라.

답: $y = (\ln 2)x + 1$

4. 다음 표를 이용하여 물음에 답하여라.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

$h_1(x) = f(g(x))$, $h_2(x) = g(f(x))$, $h_3(x) = f(f(x))$, $h_4(x) = g(g(x))$ 라 할 때,
 $h_1'(1)$, $h_2'(1)$, $h_3'(1)$, $h_4'(1)$ 의 값을 구하여라.

답: 30, 36, 28, 42

3.5 음함수의 미분법

1. 음함수 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$ 를 구하여라.

(1) $x^3 - xy^2 + y^3 = 7$

답: $y' = \frac{y^2 - 3x^2}{y(3y - 2x)}$

(2) $\cos(x + y) = \sin(xy)$

답: $y' = -\frac{y \cos(xy) + \sin(x + y)}{x \cos(xy) + \sin(x + y)}$

2. 음함수 미분법을 이용하여 주어진 점에서 곡선의 접선의 방정식을 구하여라.

$$x^2 + 2xy + 4y^2 = 1, \quad (1, 0)$$

답: $y = -x + 1$

3. 음함수 미분법을 이용하여 y'' 을 구하여라.

$$y^3 - x^3 = 1$$

답: $\frac{2x}{y^5}$

4. 다음 함수를 미분하고 가능한 한 간단히 하여라.

$$f(x) = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

답: $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

3.6 로그함수의 도함수

1. 다음 함수를 미분하여라.

(1) $f(x) = \sqrt{2 + \ln 3x}$

답: $\frac{1}{2x\sqrt{2 + \ln 3x}}$

(2) $y = \ln(x\sqrt{x^2 + 1})$

답: $\frac{2x^2 + 1}{x(x^2 + 1)}$

2. $g(t) = \ln(1 + \ln t)$ 일 때, $g'(t)$ 와 $g''(t)$ 를 구하여라.

답: $\frac{1}{t(1 + \ln t)}, -\frac{2 + \ln t}{t^2(1 + \ln t)^2}$

3. 로그미분법을 사용하여 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y = x^{\cos x}$

답: $x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \ln x \sin x \right)$

(2) $y = (\cos x)^{\ln x}$

답: $(\cos x)^{\ln x} \left(\frac{\ln \cos x}{x} - \tan x \cdot \ln x \right)$

4. $x^{2y} = (2y)^x$ 일 때, y' 을 구하여라.

답: $\frac{xy \ln 2y - 2y^2}{2xy \ln x - x^2}$

3.9 상관 비율

1. 반지름이 1m 원기둥 모양의 물탱크에서 1분당 3000L씩 물이 빠져나간다고 할 때, 물탱크 내부 수면 높이의 변화율 구하여라.

답: $-\frac{3}{\pi} \text{ m/min}$

2. 한 아이가 30m 상공으로 연을 날리고 있다. 2 m/sec의 속도로 부는 바람에 의해 연이 아이로부터 수평으로 멀리 움직이고 있다. 연이 아이로부터 50 m 떨어질 순간에 그 아이는 연 줄을 얼마나 빨리 풀어주어야 하는가?

답: $\frac{8}{5} \text{ m/sec}$

3. 잔잔한 연못에 조약돌을 던지면 원모양의 파문이 일어난다. 측정도구를 이용하여 계산해 보니 파문의 반지름이 5 cm 일 때, 반지름의 변화율은 2 cm/sec 이었다. 이 순간 파문의 넓이의 변화율을 구하여라.

답: $20\pi \text{ cm}^2/\text{sec}$

4. 커피 자동판매기에서 동전을 넣고 버튼을 누르면 종이컵에 $3 \text{ cm}^3/\text{sec}$ 속도로 커피가 채워진다. 커피의 깊이가 3 cm 일 때, 수면의 상승속도를 구하여라. (단, 종이컵은 원뿔을 윗면과 평행하게 잘라서 만든 모양이고 밑면과 윗면의 반지름의 길이는 각각 3 cm, 4 cm 이며, 높이는 6 cm 이다.)

답: $\frac{12}{49\pi} \text{ cm/sec}$

5. 좌표평면 위의 점 $P(x, y)$ 가 원점을 출발하여 곡선 $y = 2\sin\pi x (x \geq 0)$ 을 따라 움직이고 있고, x 는 $\sqrt{7} \text{ cm/s}$ 의 속력으로 일정하게 움직인다. $x = \frac{1}{3}$ 일 때, 원점에서 점 P까지의 거리의 변화율을 구하여라.

답: $\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$

3.10 선형 근사와 미분

1. $a = 0$ 에서 $f(x) = \sqrt{x+1}$ 의 선형 근사식을 구하고, 이것을 이용하여 $\sqrt{0.9}$ 와 $\sqrt{1.1}$ 의 근삿값을 구하여라.

답: $L(x) = 1 + \frac{x}{2}, \frac{19}{20}, \frac{21}{20}$

2. $y = 1 + \frac{2}{x-1}$ 일 때, 미분 dy 를 구하여라. 또한 $x = 2$ 이고 $dx = 0.05$ 일 때, dy 를 계산하여라.

답: $-\frac{2}{(x-1)^2}dx, -0.1$

3. $e^{0.01}$ 의 근삿값을 선형근사식과 미분을 이용하여 각각 계산하여라.

답: 1.01

4. 정육면체의 한 변의 길이를 측정한 결과 30 cm 이고 측정할 때 최대오차가 0.1 cm 이다. 미분을 이용하여 정육면체 겉넓이의 최대오차와 부피의 최대오차를 구하여라.

답: 36, 270

3.11 쌍곡선 함수

1. $\frac{1 - \tanh x}{1 + \tanh x}$ 의 값을 간단히 나타내어라.

답: e^{-2x}

2. $\coth x = \frac{13}{12}$ 일 때, $\tanh x$, $\operatorname{sech} x$, $\cosh x$, $\sinh x$, $\operatorname{csch} x$ 를 구하여라.

답: $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{13}{5}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{5}{12}$

3. 쌍곡선함수의 정의를 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh x$

답: -1

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \coth x$

답: $-\infty$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh x}{e^x}$

답: $\frac{1}{2}$

4. 다음을 미분하여라. 가능한 한 간단히 하여라.

(1) $y = x \coth \sqrt{x^2 + 1}$

답: $\coth \sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \operatorname{csch}^2 \sqrt{x^2 + 1}$

(2) $y = \sqrt{9 + x^2} - x \sinh^{-1} \frac{x}{3}$

답: $-\sinh^{-1} \frac{x}{3}$

(3) $y = \left(\frac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x} \right)^{\frac{1}{4}}$

답: $\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$