# 2022년 1학기 미적분학1 중간고사 답안지

1. 부정적분을 구하여라.

$$\int \left( x^2 + 1 + \frac{1}{x} + e^{3x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

<풀이> 준식$= \frac{x^3}{3} + x + \ln|x| + \frac{e^{3x}}{3} + \sin^{-1} x + C$

2. $y = x^{2x}$ 을 미분하여라.

<풀이>

로그미분법으로 도함수를 구하면

$$\ln y = \ln(x^{2x}) = 2x \ln x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2x \times \frac{1}{x} + 2\ln x$$

$$\Rightarrow \quad y' = (2 + 2\ln x) y = (2 + 2\ln x) x^{2x}$$

3. $f'(x) = x^3$이고 $x + y + 1 = 0$을 접선으로 갖는 함수 $f(x)$을 구하여라.

<풀이>

$f'(x) = x^3$이면 $f(x) = \frac{x^4}{4} + C$이고,

곡선 $y = f(x)$위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y = a^3(x-a) + f(a) = -x-1$이므로,

$a^3 = -1$, $-a^4 + f(a) = -1 \Rightarrow a = -1$, $f(-1) = 0$이다.

그러므로 $0 = f(-1) = \frac{1}{4} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$,

따라서 $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}$이다.

4. 다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2x+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)}$$

<풀이>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2x+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2x+1}\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{x}\right)}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{\sqrt{3}}{x}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{12}$$

5. $\displaystyle\int\frac{x\sqrt{\tan^{-1}(x^2)}}{1+x^4}dx$ 의 값을 구하여라.

<풀이>

$\displaystyle\int\frac{x\sqrt{\tan^{-1}(x^2)}}{1+x^4}dx$ ($u=\tan^{-1}(x^2)$ 치환)

$$=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{1}{3}\left(\tan^{-1}(x^2)\right)^{\frac{3}{2}}+C$$

6. 함수 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{5}{2}-x\right)$에 대하여 증가구간, 감소구간, 극댓값, 극솟값, 변곡점을 구하여라.

<풀이>

$f'(x)=-\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-1)$ 이다.

임계수는 $x=0$과 $x=1$이고
$(-\infty,0)$과 $(1,\infty)$에서 감소하고 $(0,1)$에서 증가한다.

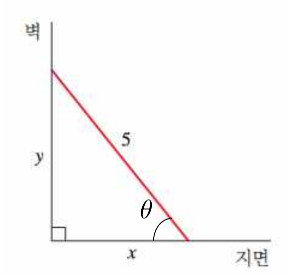
극솟값은 $f(0)=0$이고 극댓값은 $f(1)=\frac{3}{2}$이다.

$f''(x)=-\frac{5}{9}x^{-\frac{4}{3}}(2x+1)$이므로

$(-\infty,-\frac{1}{2})$에서 아래로 볼록이고 $(-\frac{1}{2}\infty)$에서 위로 볼록이므로

변곡점은 $(-\frac{1}{2},\frac{3\sqrt[3]{2}}{2})$이다.

7. 길이 5m의 사다리가 수직인 벽면에 기대어 있다. 사다리의 밑은 벽면으로부터 1m/s의 비율로 미끄러져 간다. 사다리의 밑이 벽에서 3m떨어질 때, 사다리와 지면이 이루는 각의 변화율을 구하여라.




<풀이>

$\frac{dx}{dt}=1$이고 $\cos\theta=\frac{x}{5}$이다.

양변을 $t$로 미분하면,

$-\sin\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{5}\frac{dx}{dt}=\frac{1}{5}$이다.

$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{5\sin\theta}$

이고 $x=3$일 때, $y=4$이고 $\sin\theta=\frac{4}{5}$이다.

따라서, $\left.\frac{d\theta}{dt}\right|_{x=3}=-\frac{1}{4}$이다.

8. 미분 가능한 함수 $f(x)$가 $x>0$인 실수 $x$에 대해

$$f(x)+x^2\{f(x)\}^3=10$$

을 만족시킨다. $f(1)=2$일 때,

(1) $f'(1)$을 구하여라.

(2) $a=1$에서 $f(x)$의 선형근사식 $L(x)$을 구하고, 이것을 이용하여 $f(1.1)$의 근삿값을 구하여라.

<풀이>

(1) 음함수 미분법에 의해

$$f'(x)+3x^2\{f(x)\}^2f'(x)+2x\{f(x)\}^3=0$$

$$\Rightarrow \quad f'(x)=-\frac{2x\{f(x)\}^3}{1+3x^2\{f(x)\}^2}$$

이므로

$$f'(1)=-\frac{2\{f(1)\}^3}{1+3\{f(1)\}^2}=-\frac{16}{13} \text{ 이다.}$$

(2) $a=1$에서의 선형근사식은

$$L(x)=f(1)+f'(1)(x-1)=2-\frac{16}{13}(x-1)=-\frac{16}{13}x+\frac{42}{13}$$

이다.

$f(1.1)$의 근사값은

$$f(1.1)\approx L(1.1)=-\frac{16}{13}\times 1.1+\frac{42}{13}=\frac{244}{130}$$