미분적분학1	Worksheet #8	학번	
		성명	

[연습문제 5.2]

25. 정리 $\boxed{4}$의 적분의 정의를 이용하여 아래 적분을 계산하여라.

$$\int_0^1 (x^3 - 3x^2)dx$$

(풀이)

$a=0,\ b=1,\ f(x)=x^3-3x^2$이므로

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x = \frac{i}{n}$$

이 되어

$$\int_0^1 (x^3-3x^2)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i^3-3x_i^2)\Delta x$$

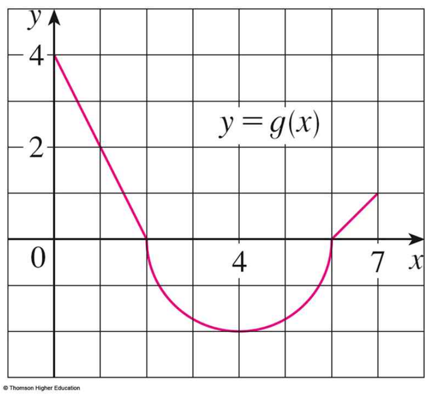
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{i}{n}\right)^3 - 3\left(\frac{i}{n}\right)^2\right\}\times\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^3}{n^4}-\frac{3i^2}{n^3}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}\times\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - \frac{3}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

34. 두 개의 직선과 하나의 반원으로 된 g의 그래프는 아래와 같다 각 적분을 계산하여라.



(a) $\int_0^2 g(x)dx$

(b) $\int_2^6 g(x)dx$

(c) $\int_0^7 g(x)dx$

(풀이)

(a) 정적분의 값이 삼각형의 넓이와 같으므로₩

$$\int_0^2 g(x)dx = \frac{1}{2}\times 2\times 4 = 4$$

(b) 정적분의 값이 반원의 넓이에 음의 부호를 붙인 것과 같으므로

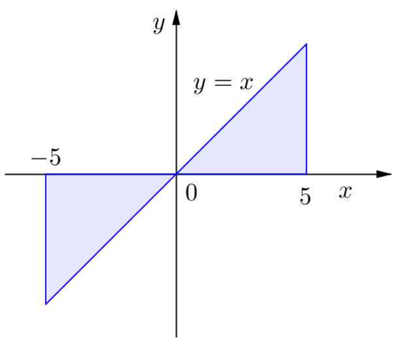
$$\int_2^6 g(x)dx = -\frac{1}{2}\times 4\pi = -2\pi$$

(c) $\int_0^7 g(x)dx = 4 - 2\pi + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 2\pi$

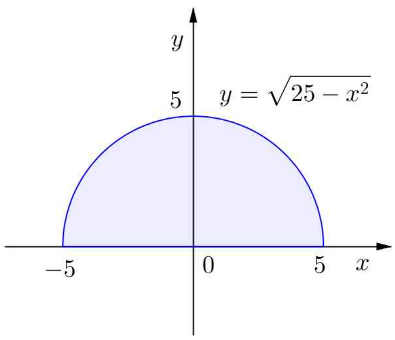
38. 다음 적분을 넓이로 해석하여 계산하여라.

$$\int_{-5}^{5}\left(x - \sqrt{25-x^2}\right)dx$$

(풀이)



위의 그림과 같으므로 $\int_{-5}^{5} x dx = 0$이고 $y=\sqrt{25-x^2}$의 그래프가 아래 그림과 같이 반원이 되므로



$\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\times 25\pi=\frac{25\pi}{2}$이다. 따라서,

$$\int_{-5}^{5}\left(x-\sqrt{25-x^2}\right)dx=\int_{-5}^{5}x\,dx-\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx$$

$$=0-\frac{25\pi}{2}=-\frac{25\pi}{2}$$

이다.

73. 다음 극한을 정적분으로 표현하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^4}{n^5}$$

(풀이)

$a=0,\ b=1,\ f(x)=x^4$이라 할 때,

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$$

$$x_i=a+i\Delta x=\frac{i}{n}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^4}{n^5}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^4\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x^4\,dx$$

이다.

74. 다음 극한을 정적분으로 표현하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

(풀이)

$a=0,\ b=1,\ f(x)=\frac{1}{1+x^2}$이라 할 때,

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$$

$$x_i=a+i\Delta x=\frac{i}{n}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

이다.

[연습문제 5.3]

7-18. 미적분학의 기본정리 1을 이용하여 다음 함수의 도함수를 구하여라.

9. $g(x)=\int_1^x\frac{1}{t^3+1}\,dt$

(풀이)

FTC1에 의해 $g'(x)=\frac{1}{x^3+1}$이다.

13. $h(x)=\int_1^{e^x}\ln t\,dt$

(풀이)

$g(x)=\int_1^x\ln t\,dt$라 하자. 그러면 FTC1에 의해

$$g'(x)=\ln x$$

이고,

$$h(x)=\int_1^{e^x}\ln t\,dt=g(e^x)$$

이므로 연쇄법칙에 의해

$$h'(x)=\frac{d}{dx}\{g(e^x)\}=g'(e^x)\times e^x$$

$$=\ln(e^x)\times e^x=xe^x$$

이다.

15. $y=\int_1^{3x+2}\frac{t}{1+t^3}\,dt$

(풀이)

$g(x)=\int_1^{3x+2}\frac{t}{1+t^3}\,dt$라 하자. 그러면 FTC1에 의해

$$g'(x)=\frac{x}{1+x^3}$$

이고,

$$y=\int_1^{3x+2}\frac{t}{1+t^3}\,dt=g(3x+2)$$

이므로 연쇄법칙에 의해

$$y'=\frac{d}{dx}\{g(3x+2)\}=g'(3x+2)\times 3$$

$$=\frac{3(3x+2)}{1+(3x+2)^3}$$

이다.

17. $y=\int_{\sqrt{x}}^{\frac{\pi}{4}}\theta\tan\theta\,d\theta$

(풀이)

$g(x)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{x}\theta\tan\theta\,d\theta$라 하자. 그러면 FTC1에 의해

$$g'(x)=x\tan x$$

이고,

$$y=\int_{\sqrt{x}}^{\frac{\pi}{4}}\theta\tan\theta\,d\theta=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\sqrt{x}}\theta\tan\theta\,d\theta=g(\sqrt{x})$$

이므로 연쇄법칙에 의해

$$y'=\frac{d}{dx}\{-g(\sqrt{x})\}=-g'(\sqrt{x})\times\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=-\frac{\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

이다.

28. 적분을 계산하여라.

$$\int_0^1(3+x\sqrt{x})dx$$

(풀이)

$$\int_0^1(3+x\sqrt{x})dx=\int_0^1\left(3+x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$=\left[3x+\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}\right]_0^1=3+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$$

29. 적분을 계산하여라.

$$\int_1^4\frac{2+x^2}{\sqrt{x}}dx$$

(풀이)

$$\int_1^4\frac{2+x^2}{\sqrt{x}}dx=\int_1^4\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{x^2}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$=\int_1^4\left(2x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$=\left[2\times\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}\right]_1^4$$

$$=\left[4\sqrt{x}+\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_1^4$$

$$=\left(4\sqrt{4}+\frac{2}{5}\times16\sqrt{4}\right)-\left(4+\frac{2}{5}\right)=\frac{82}{5}$$

57. 다음 방정식에서 무엇이 잘못되었는가?

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sec\theta\tan\theta\,d\theta=\sec\theta]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=-3$$

(풀이)

함수 $y=\sec\theta\tan\theta$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 불연속이므로, 구간 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$에서 연속이 아니다. 따라서 첫 번째 등식이 성립하지 않는다.

61. 도함수를 구하여라.

$$F(x)=\int_x^{x^2}e^{t^2}dt$$

(풀이)

함수 $G(t)$를 $g(t)=e^{t^2}$의 원시함수라 하자. 그러면 $G'(t)=g(t)=e^{t^2}$이고, FTC2에 의해

$$F(x)=\int_x^{x^2}e^{t^2}dt=[G(t)]_x^{x^2}=G(x^2)-G(x)$$

이므로, 연쇄법칙에 의해

$$F'(x)=G'(x^2)\times2x-G'(x)=2xg(x^2)-g(x)$$

$$=2xe^{(x^2)^2}-e^{x^2}=2xe^{x^4}-e^{x^2}$$

이다.

67. $F(x)=\int_2^x e^{t^2}dt$일 때 x좌표가 2인 점에서 곡선 $y=F(x)$의 접선의 방정식을 구하여라.

(풀이)

FTC1에 의해 $F'(x)=e^{x^2}$이고

$$F(2)=\int_2^2 e^{t^2}dt=0$$

이므로 접선의 방정식은

$$y-F(2)=F'(2)(x-2)$$

$$\Rightarrow\quad y=e^4(x-2)$$

이다.