미분적분학1	Worksheet #10	학번	
		성명	

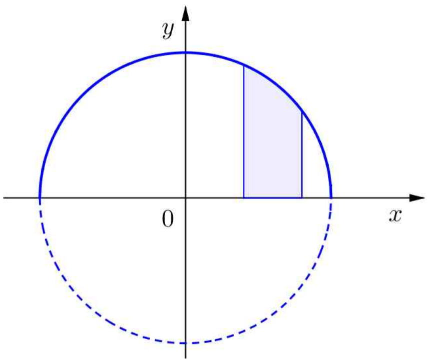
[연습문제 6.2]

1-18. 주어진 곡선들로 둘러싸인 영역을 주어진 직선을 축으로 회전하여 생기는 입체의 부피를 구하여라. 또한 둘러싸인 영역, 입체와 대표 원판 또는 고리 모양의 절단면을 그려라.

5. x축에 대하여 $y=\sqrt{25-x^2}$, $y=0$, $x=2$, $x=4$

(풀이)

주어진 곡선으로 둘러싸인 영역이 아래 그림과 같다.



따라서 대표 원판의 반지름은 $y=\sqrt{25-x^2}$ 이고 원판의 넓이는

$$A(x)=\pi y^2=\pi(25-x^2)$$

이므로, 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\int_2^4 A(x)dx=\int_0^2 \pi(25-x^2)dx$$

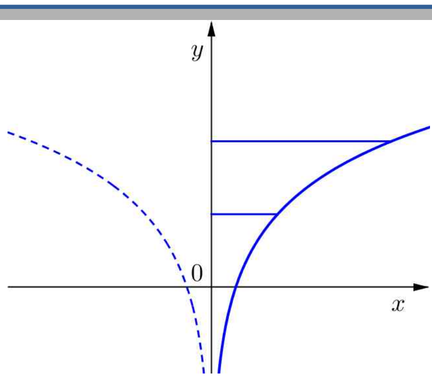
$$=\left[\pi\left(25x-\frac{1}{3}x^3\right)\right]_2^4=\frac{94\pi}{3}$$

이다.

7. y축에 대하여 $y=\ln x$, $y=1$, $y=2$, $x=0$

(풀이)

주어진 곡선으로 둘러싸인 영역이 아래 그림과 같다.



따라서 대표 원판의 반지름은 $x=e^y$이고 원판의 넓이는

$$A(y)=\pi x^2=\pi e^{2y}$$

이므로, 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\int_1^2 A(y)dy=\int_1^2 \pi e^{2y}dy$$

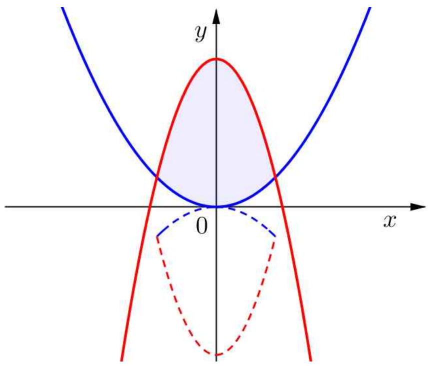
$$=\left[\frac{\pi}{2}e^{2y}\right]_1^2=\frac{\pi(e^4-e^2)}{2}$$

이다.

9. x축에 대하여 $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=5-x^2$

(풀이)

주어진 곡선으로 둘러싸인 영역이 아래 그림과 같다.



두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면

$$5-x^2=\frac{1}{4}x^2$$

$\Rightarrow$ $5x^2-20=0$

$\Rightarrow$ $x=-2,2$

이고, 대표 고리 모양의 큰 원의 반지름은 $y=5-x^2$이고, 작은 원의 반지름은 $y=\frac{1}{4}x^2$이다. 따라서 고리의 넓이는

$$A(x)=\pi(5-x^2)^2-\pi\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2=\pi\left(25-10x^2+\frac{15}{16}x^4\right)$$

MYONGJI UNIVERSITY

이므로, 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\int_{-2}^{2}A(x)dx=\int_{-2}^{2}\pi\left(25-10x^2+\frac{15}{16}x^4\right)dx$$

$$=2\int_{0}^{2}\pi\left(25-10x^2+\frac{15}{16}x^4\right)dx$$

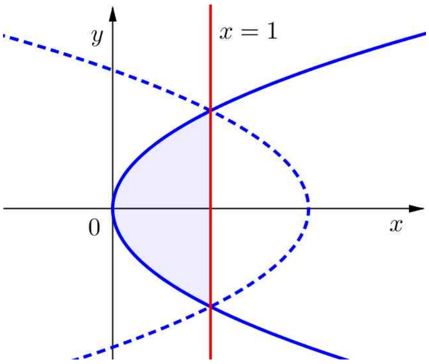
$$=2\pi\left[25x-\frac{10}{3}x^3+\frac{3}{16}x^5\right]_0^2=\frac{176\pi}{3}$$

이다.

17. $x=1$에 대하여 $x=y^2$, $x=1$

(풀이)

주어진 곡선으로 둘러싸인 영역이 아래 그림과 같다.



$x=y^2$과 $x=1$의 교점의 y좌표는 $-1, 1$이고, 대표 원판의 반지름은 $r=1-x=1-y^2$이다. 따라서 원판의 넓이는

$$A(y)=\pi r^2=\pi(1-y^2)^2=\pi(1-2y^2+y^4)$$

이므로, 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\int_{-1}^{1}A(y)dy=\int_{-1}^{1}\pi(1-2y^2+y^4)dy$$

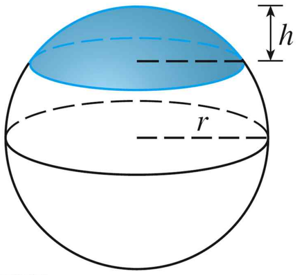
$$=2\int_{0}^{1}\pi(1-2y^2+y^4)dy$$

$$=2\pi\left[y-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5\right]_0^1=\frac{16\pi}{15}$$

이다.

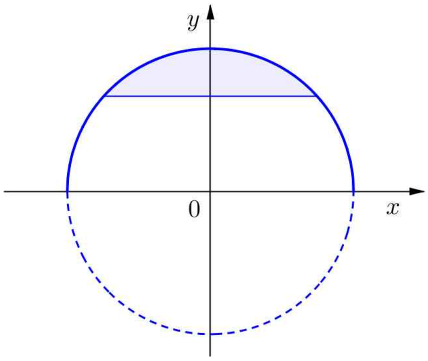
49. 주어진 입체 S의 부피를 구하여라.

반지름이 r이고 높이가 h인 구의 윗부분



(풀이)

구의 중심을 지나는 단면을 구의 중심을 원점으로 하면 좌표평면에 그리면 아래 그림과 같다.



원의 방정식이 $x^2+y^2=r^2$이고 대표 원판의 반지름은 $x=\sqrt{r^2-y^2}$이다. 따라서 원판의 넓이는

$$A(y)=\pi x^2=\pi(r^2-y^2)$$

이므로, 구하는 부피 S는

$$S=\int_{r-h}^{r}A(y)dy=\int_{r-h}^{h}\pi(r^2-y^2)dy$$

$$=\pi\left[r^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{r-h}^{r}=\frac{\pi(3r-h)h^2}{3}$$

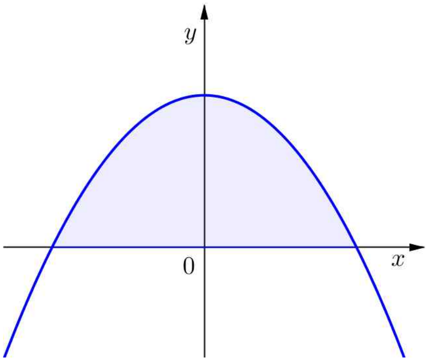
이다.

59. 주어진 입체 S의 부피를 구하여라.

S의 밑면은 연습문제 58과 같은 밑면(포물선 $y=1-x^2$과 x축으로 둘러싸인 영역)이고 x축에 수직인 절단면은 높이가 밑변의 길이와 같은 이등변삼각형이다.

(풀이)

밑면의 모양이 아래 그림과 같다.



따라서 절단면인 이등변삼각형의 밑변의 길이와 높이는 $y=1-x^2$이므로 절단면의 넓이는

$$A(x)=\frac{1}{2}(1-x^2)^2=\frac{1}{2}(1-2x^2+x^4)$$

이다. 따라서 구하는 부피 S는

$$S=\int_{-1}^{1}A(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1-2x^2+x^4)dx$$

$$=2\int_{0}^{1}\frac{1}{2}(1-2x^2+x^4)dx$$

$$=\left[x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5\right]=\frac{8}{15}$$

이다.

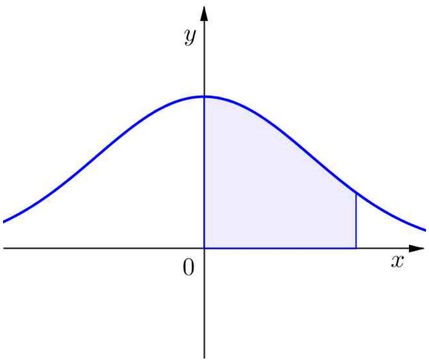
[연습문제 6.3]

5. 원통셸 방법을 사용하여 주어진 곡선으로 둘러싸인 영역을 y축으로 회전하여 만들어진 입체의 부피를 구하여라.

$$y=e^{-x^2},\ y=0,\ x=0,\ x=1$$

(풀이)

주어진 곡선으로 둘러싸인 영역이 아래 그림과 같다.



대표 원기둥의 밑면의 반지름은 x 높이는 $y=e^{-x^2}$이므로, 대표 원기둥의 옆넓이는

$$A(x)=2\pi xe^{-x^2}$$

이다. 따라서 구하는 입체의 부피 V는

$$V=\int_{0}^{1}A(x)dx=\int_{0}^{1}2\pi xe^{-x^2}dx$$

$$=\int_{0}^{1}\pi e^{-u}du \quad (u=x^2\text{으로 치환})$$

$$=\left[-\pi e^{-u}\right]_0^1=\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

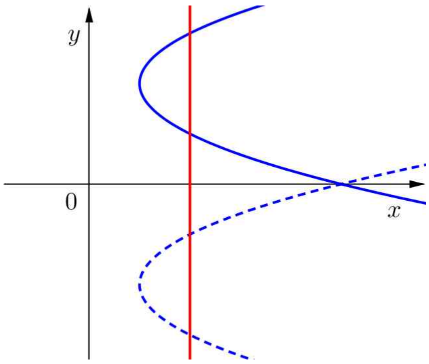
이다.

13. 원통셸 방법을 사용하여 주어진 곡선으로 둘러싸인 영역을 x축으로 회전하여 만들어진 입체의 부피를 구하여라.

$$x=1+(y-2)^2,\ x=2$$

(풀이)

주어진 곡선으로 둘러싸인 영역이 아래 그림과 같다.



두 곡선 $x=1+(y-2)^2$, $x=2$의 교점의 y좌표를 구하면

$$1+(y-2)^2=2$$

$$\Rightarrow\quad y^2-4y+3=0$$

$$\Rightarrow\quad y=1,3$$

이고, 대표 원기둥의 밑면의 반지름은 y 높이는

$$2-x=2-\{1+(y-2)^2\}=-y^2+4y-3$$

이므로, 대표 원기둥의 옆넓이는

$$A(y)=2\pi y(-y^2+4y-3)=2\pi(-y^3+4y^2-3y)$$

이다. 따라서 구하는 입체의 부피 V는

$$V=\int_{1}^{3}A(y)dy=\int_{1}^{3}2\pi(-y^3+4y^2-3y)dy$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{4}y^4+\frac{4}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2\right]_1^3=\frac{16\pi}{3}$$

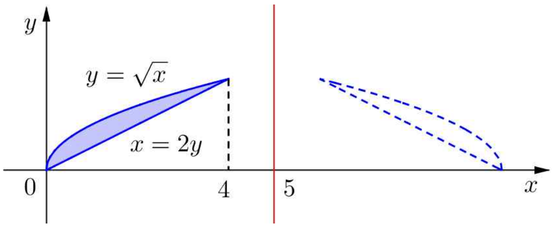
이다.

15-20. 원통셸 방법을 사용하여 주어진 곡선으로 둘러싸인 영역을 주어진 직선을 축으로 회전하여 만들어진 입체의 부피를 구하여라.

18. $x=5$에 대하여 $y=\sqrt{x}$, $x=2y$

(풀이)

주어진 곡선으로 둘러싸인 영역이 아래 그림과 같다.



두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $x=2y$의 교점의 x좌표를 구하면

$$\sqrt{x}=\frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{1}{4}x^2$$

$$\Rightarrow \quad y=0,4$$

이고, 대표 원기둥의 밑면의 반지름은 $5-x$ 높이는 $\sqrt{x}-\frac{1}{2}x$이므로, 대표 원기둥의 옆넓이는

$$A(x)=2\pi(5-x)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)$$
$$=\pi\left(x^2-2x\sqrt{x}-5x+10\sqrt{x}\right)$$

이다. 따라서 구하는 입체의 부피 V는

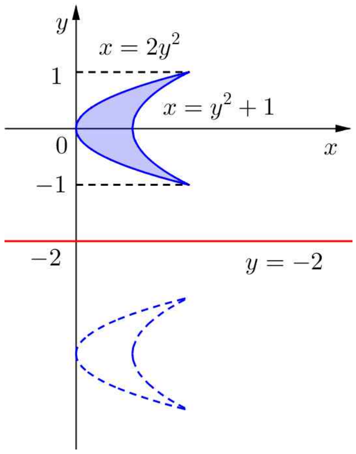
$$V=\int_0^4 A(x)dx$$
$$=\int_0^4 \pi\left(x^2-2x\sqrt{x}-5x+10\sqrt{x}\right)dx$$
$$=\int_0^4 \pi\left(x^2-2x^{\frac{3}{2}}-5x+10x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3-2\times\frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}}-\frac{5}{2}x^2+10\times\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$
$$=\frac{136\pi}{15}$$

이다.

20. $y=-2$에 대하여 $x=2y^2$, $x=y^2+1$

(풀이)

주어진 곡선으로 둘러싸인 영역이 아래 그림과 같다.



두 곡선 $x=2y^2$, $x=y^2+1$의 교점의 y좌표를 구하면

$$2y^2=y^2+1$$

$$\Rightarrow \quad y^2=1$$

$$\Rightarrow \quad y=-1,1$$

이고, 대표 원기둥의 밑면의 반지름은 $y+2$ 높이는

$$(y^2+1)-2y^2=1-y^2$$

이므로, 대표 원기둥의 옆넓이는

$$A(y)=2\pi(y+2)(1-y^2)=2\pi(-y^3-2y^2+y+2)$$

이다. 따라서 구하는 입체의 부피 V는

$$V=\int_{-1}^1 A(y)dy$$
$$=\int_{-1}^1 2\pi(-y^3-2y^2+y+2)dy$$
$$=2\int_0^1 2\pi(-2y^2+2)dy$$
$$=4\pi\left[-\frac{2}{3}y^3+2y\right]_0^1=\frac{16\pi}{3}$$

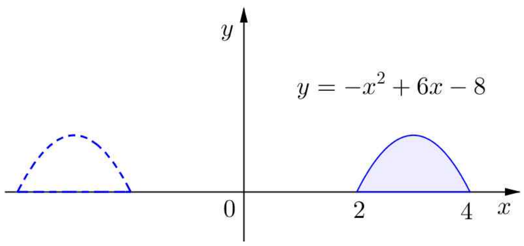
이다.

37-43. 주어진 곡선으로 둘러싸인 영역을 주어진 직선을 축으로 회전하였다. 편한 방법으로 이 입체의 부피를 구하여라.

37. y축에 대하여 $y=-x^2+6x-8$, $y=0$

(풀이)

주어진 곡선으로 둘러싸인 영역이 아래 그림과 같다.



두 곡선 $y=-x^2+6x-8$, $y=0$의 교점의 x좌표를 구하면

$$-x^2+6x-8=0$$

$$\Rightarrow \quad -(x-2)(x-4)=0$$

$$\Rightarrow \quad x=2,4$$

이고, 대표 원기둥의 밑면의 반지름은 x 높이는 $-x^2+6x-8$이므로, 대표 원기둥의 옆넓이는

$$A(x)=2\pi x(-x^2+6x-8)$$

$$=2\pi(-x^3+6x^2-8x)$$

이다. 따라서 구하는 입체의 부피 V는

$$V=\int_2^4 A(x)dx$$

$$=\int_2^4 2\pi(-x^3+6x^2-8x)dx$$

$$=2\pi\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-4x^2\right]_2^4$$

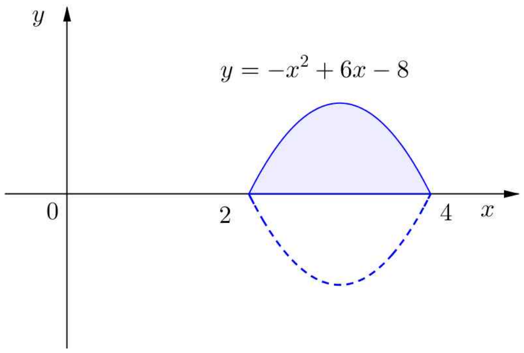
$$=8\pi$$

이다.

38. x축에 대하여 $y=-x^2+6x-8$, $y=0$

(풀이)

주어진 곡선으로 둘러싸인 영역이 아래 그림과 같다.



따라서 대표 원판의 반지름은 $y=-x^2+6x-8$이고 원판의 넓이는

$$A(x)=\pi(-x^2+6x-8)^2$$

$$=\pi(x^4-12x^3+52x^2-96x+64)$$

이므로, 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\int_2^4 A(x)dx$$

$$=\int_2^4 \pi(x^4-12x^3+52x^3-96x+64)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-3x^4+\frac{52}{3}x^3-48x^2+64x\right]_2^4$$

$$=\frac{336\pi}{5}$$

이다.

[연습문제 7.1]

3-36. 다음 적분을 계산하여라.

6. $\int t\sin 2t\,dt$

(풀이)

$u=t$, $v'=\sin 2t$라 하면 $u'=1$, $v=-\frac{1}{2}\cos 2t$이므로, 부분적분법에 의해

$$\int t\sin 2t\,dt=t\times\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2t-\int\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2t dt$$

$$=-\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t+C$$

12. $\int \tan^{-1}2y\,dy$

(풀이)

$u=\tan^{-1}2y$, $v'=1$라 하면 $u'=\frac{2}{1+(2y)^2}=\frac{2}{1+4y^2}$, $v=y$ 이므로, 부분적분법에 의해

$$\int \tan^{-1}2y\,dy=\tan^{-1}2y\times y-\int\frac{2}{1+4y^2}\times y dy$$

$$=y\tan^{-1}2y-\int\frac{1}{4}\times\frac{8y}{1+4y^2}dy$$

$$=y\tan^{-1}2y-\frac{1}{4}\ln(1+4y^2)+C$$

28. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}dy$

(풀이)

$u=\ln y$, $v'=\frac{1}{\sqrt{y}}=y^{-\frac{1}{2}}$라 하면 $u'=\frac{1}{y}$,

$v=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}y^{-\frac{1}{2}+1}=2y^{\frac{1}{2}}$이므로, 부분적분법에 의해

$$\int_4^9\frac{\ln y}{\sqrt{y}}dy=\left[\ln y\times 2y^{\frac{1}{2}}\right]_4^9-\int_4^9\frac{1}{y}\times 2y^{\frac{1}{2}}dy$$

$$=[2\sqrt{y}\ln y]_4^9-\int_4^9 2y^{-\frac{1}{2}}dy$$

$$=6\ln 9-4\ln 4-\left[2\times\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}y^{-\frac{1}{2}+1}\right]_4^9$$

$$=12\ln 3-8\ln 2-[4\sqrt{y}]_4^9$$

$$=12\ln 3-8\ln 2-4$$

39. 먼저 치환을 한 다음 부분적분법을 이용하여 적분을 계산하여라.

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta$$

(풀이)

$x=\theta^2$이라 하자. 그러면 $dx=2\theta d\theta$이므로 $\theta d\theta=\frac{1}{2}dx$이고 $\theta=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$일 때, $x=\frac{\pi}{2}$, $\theta=\sqrt{\pi}$일 때, $x=\pi$이므로

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta = \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \theta^2 \times \cos(\theta^2) \times \theta\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x \times \frac{1}{2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}x\cos x dx$$

이다. $u=\frac{1}{2}x$, $v'=\cos x$라 하면 $u'=\frac{1}{2}$, $v=\sin x$이므로, 부분적분법에 의해

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}x\cos x dx = \left[\frac{1}{2}x\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\sin x dx$$

$$= \frac{1}{2}\pi\sin\pi - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \left[-\frac{1}{2}\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\pi - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

이다. 따라서,

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3 \cos(\theta^2)\, d\theta = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

이다.